Betrachtungen über orthogonale wie schiefwinklige Trajektorien*

Leonhard Euler

§1 Wenn, nachdem die Gleichung für den Kreis $yy = aa - xx$ vorgelegt worden ist, wenn dem Radius a nacheinander die einen und die anderen Werte zugeteilt werden, von $a = 0$ bis hin zu $a = \infty$, werden unendlich viele um denselben Mittelpunkt C beschriebene Kreise entstehen, (Fig. 1)[1],

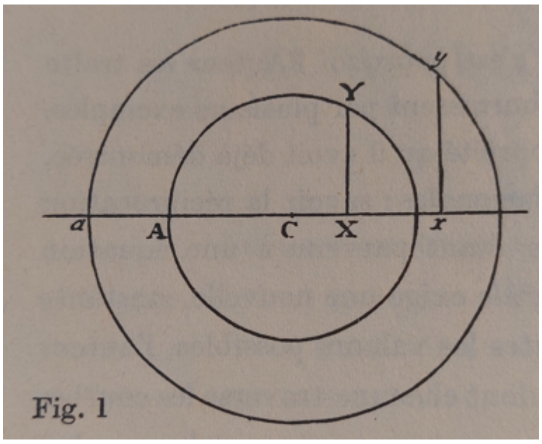


Fig. 1

von welcher Art die Kreise AY und ay sind, sodass diese Gleichung

*Originaltitel: "Considerationes super traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 1* (1787, verfasst 1775): pp. 3–46, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Volume 29, pp. 28 – 71, Eneström-Nummer E609, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

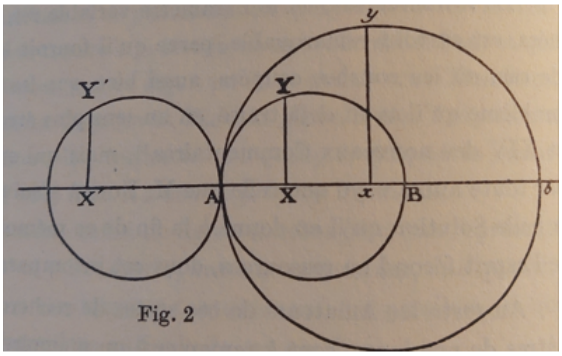
[1]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$yy = aa - xx$$

unendlich viele Kreise in sich umfasst; und in der ganzen Ebene, in welcher diese Kreise beschrieben werden, wird kein Punkt Y gegeben sein, durch welchen nicht irgendeiner dieser Kreise hindurchgeht. In gleicher Weise, wenn in dieser Gleichung für einen Kreis

$$yy = 2ax - xx$$

dem Radius aa nacheinander alle Werte von $a = 0$ bis hin zu $a = \infty$ zugeteilt werden, die Abszissen x aber immer auf derselbe Achse und von derselben Grenze aus genommen werden, werden auch unendlich viele Kreise beschrieben werden, welche sich alle gegenseitig am Anfang der Abszissen A berühren (Fig. 2)[2] und deren Mittelpunkte wereden auf der Achse immer weiter vom Punkt A entfernt liegen.



Ja sogar, wenn dem Radius a negative Werte zugeteilt werden, werden die Kreise auf den anderen Teil derselben Achse fallen, für welche auch die Abszissen negativ werden werden; und auch in diesem Fall wird in diesem ganzen Raum kein Punkt gegeben sein, durch welchen nicht irgendeiner dieser Kreise hindurchgeht. Wenn aber eine solche Gleichung

$$yy = cc - (x - a)^2$$

festgelegt wird und der Größe a ununterbrochen alle möglichen Werte zugeteilt werden, während die Größe c konstant bleibt, werden unendlich viele einander gleiche Kreise (Fig. 3)[3],

[2]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.
[3]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

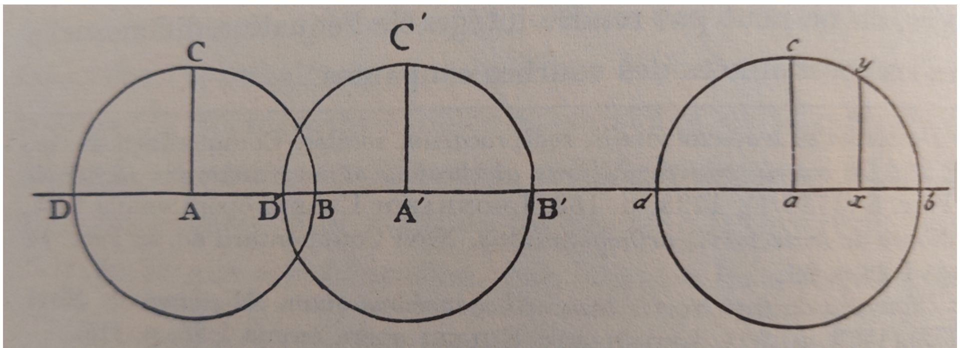


Fig. 3

von all welchen der Radius $= c$ ist, über derselben Achse beschrieben werden, von welchen Kreisen der erste, wenn $a = 0$ ist, DCB sei, während A der Anfang der Abszissen ist; ein anderer wird hingegen dcb sein, noch ein anderer $D'C'B'$, mit dem Radius $= c$ beschrieben, für welche die Strecken Aa, $AA' = a$ seien, sodass all diese Kreise entspringen, wenn der Kreis BCD ununterbrochen entlang der Achse vorwärts bewegt wird. Aber diesem Fall, welcher Punkt y auch immer angenommen wird, dessen Abstand xy von der Achse nicht den Radius c übersteige, wird immer ein Kreis gegeben sein, der diesen Punkt durchläuft. Wenn aber diese Gleichung

$$y = \frac{a}{c}\sqrt{cc - xx}$$

festgelegt wird, wo wiederum die Größe a kontinuierlich vermehrt werde, während c dieselbe bleibt, wird im Fall $a = c$ der Kreis DCB (Fig. 4)[4] beschrieben werden.

[4]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

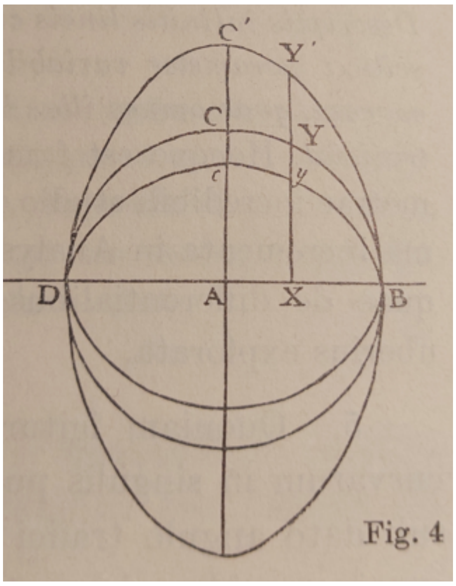


Fig. 4

Wenn $a < c$ ist, wird die Ellipse BcD hervorgehen, die über derselben Achse $BD = 2c$ zu beschreiben ist; aber wenn $a > c$ genommen wird, werden die Ellipsen $BC'D$ entspringen, von welchen die Gerade BD die kleinere Achse war, die größere hingegen ununterbrochen wächst, sodass diese Gleichung unendlich viele Ellipsen umfasst, die über derselben Achse BD zu beschreiben sind, während die andere Achse, welche $= 2a$ ist, kontinuierlich von 0 bis ins Unendliche vermehrt werden wird. Solange also der Punkt y so genommen wird, dass sein Abstand von der Gerade AC' nicht größer als c ist, wird immer eine solche Ellipse gegeben sein, welche durch ihn hindurchgeht.

§2 Aus diesen Beispielen ist schon im Überfluss klar, wie unendlich viele Kurven in derselben Gleichung erfasst werden können, was natürlich passiert, wenn die Gleichung zwischen den Koordinaten x und y eine konstante Größe a solcher Art involviert, welcher nacheinander alle möglichen Werte zugeteilt zu werden aufgefasst werde, so dennoch, dass für dieselbe Kurve diese Größe a denselben Wert beibehält; während wir aber zu anderen Kurven übergehen, werden ihre Werte kontinuierlich verändert. Wir wollen aber die Abszissen und Ordinaten ununterbrochen auf gewohnte Weise mit den Buchstaben x und y bezeichnen, aber jene konstante Größe, die sich kontinuierlich zu verändern aufgefasst wird, mit dem Buchstaben a, welchen wir den *variablen Parameter* dieser Kurven nennen werden.

§3 Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, welche Gleichung auch immer für solche unendlich vielen Kurven aufgestellt worden ist, die den variablen Parameter a irgendwie involvieren, wird sich die Ordinate y immer als eine Funktion der zwei Variablen x und a ansehen lassen; oder auch die Abszisse x wird einer bestimmten Funktion von y und a gleich sein; dann wird dieser variable Parameter a aber auch als Funktion der beiden anderen x und y angesehen werden können. Wie im dem letzten erwähnten Beispiel zuerst

$$y = \frac{a}{c}\sqrt{cc - xx}$$

ist, das heißt, eine Funktion von x und a; dann wird aber

$$x = \frac{c}{a}\sqrt{aa - yy}$$

sein, das heißt, eine Funktion von y und a; schließlich wird aus derselben Gleichung

$$a = \frac{cy}{\sqrt{cc - xx}},$$

das heißt, eine Funktion von x und y.

§4 Nachdem diese Dinge vorausgeschickt worden sind, wird das Problem der Trajektorien wie folgt sehr schön formuliert werden können:
Nachdem unendlich viele in derselben allgemeinen Gleichung enthaltene Kurven beschrieben worden sind, in welche natürlich der variable Parameter a auf irgendeine Weise eingehe, eine Kurve solcher Art zu bestimmen, die alle jene Kurven überall in demselben Winkel, rechtwinklig oder schiefwinklig, schneide.
Und das ist jenes weltberühmte Problem, mit welchem vor langer Zeit die Geometer mit unglaublichen Eifer beschäftigt waren und aus deren Gedanken die größten Zuwächse in die Analysis eingegangen sind, zu welchen besonders die zu zählen sind, die über die Differentiale von Funktionen von zwei Variablen bald darauf ermittelt worden sind.

§5 Weil ja also diese Frage von den Tangenten jener unendlich vielen Kurven in den einzelnen Punkten handelt, welche von der gesuchten Kurve überall in einem gegebenen Winkel durchlaufen werden müssen, muss eine Differentialgleichung für jene unendlich vielen Kurven betrachtet werden; und

weil die gesuchte Kurve ununterbrochen die einen und die anderen aus jenen unendlich vielen Kurven schneiden wird, ist bei dieser Differentiation auch der Veränderlichkeit des Parameters a Rechnung zu tragen; daher sind drei Fälle besonders zu entwickeln:
1) Wenn y einer Funktion von x und a gleich wird, wird die Differentialgleichung eine Form dieser Art haben:

$$dy = pdx + qda,$$

wo p und q so voneinander abhängig sein müssen, dass

$$\left(\frac{dp}{da}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$$

ist.
2) Wenn x eine Funktion von y und a gleich wird, wird die Differentialgleichung

$$dx = rdy + sda$$

sein, wo r und s so voneinander abhängen werden, dass

$$\left(\frac{dr}{da}\right) = \left(\frac{ds}{dy}\right)$$

ist, welchen Fall einzeln zu entwickeln aber überflüssig wäre, weil ja die beiden Koordinaten x und y vom ihrer Natur her austauschbar sind.
3) Wenn aber der Parameter a einer Funktion von x und y gleich wird, wird eine Differentialgleichung von dieser Art hervorgehen

$$da = tdx + udy,$$

in welcher immer $\left(\frac{dt}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)$ sein wird.

§6 Aber wenn die vorgelegte Gleichung zwischen x, y und a so beschaffen war, dass sich weder y durch x und a noch x durch y und a und auch nicht a durch x und y angenehm bestimmen lässt, dann wird die Gleichung auf gewohnte Weise auf eine solche Form führen

$$Pdy + Qdx + Rda = 0,$$

wo schon hinreichend bekannt ist, dass eine solche Gleichung zwischen drei Variablen überhaupt nur bestehen kann, wenn zwischen den Größen P, Q und R eine gewisse Relation besteht. Um diese Relation ausfindig zu machen, ist vor allem zu betrachten, dass diese Gleichung nur möglich ist, wenn ein gewisser Multiplikator M gegeben ist, der sie in der Tat integrierbar macht, sodass diese Formel

$$MPdy + MQdx + MRda$$

wirklich eine Integration zulässt. Daher folgt also, wenn die Größe a als Konstante angenommen wird, dass diese Formel $MPdy + MQdx$ integrierbar sein muss, wofür verlangt wird, dass

$$\left(\frac{d.MP}{dx}\right) = \left(\frac{d.MQ}{dy}\right)$$

ist, welche Gleichung entwickelt

$$\text{I.} \quad M\left(\frac{dP}{dx}\right) - M\left(\frac{dQ}{dy}\right) = Q\left(\frac{dM}{dy}\right) - P\left(\frac{dM}{dx}\right)$$

liefert. Weiter wird jene Gleichung auch integrierbar sein, wenn die Größe x als konstant angenommen wird, woher notwendigerweise

$$\left(\frac{d.MP}{da}\right) = \left(\frac{d.MR}{dy}\right)$$

wird, welche entwickelt

$$\text{II.} \quad M\left(\frac{dP}{da}\right) - M\left(\frac{dR}{dy}\right) = R\left(\frac{dM}{dy}\right) - P\left(\frac{dM}{da}\right)$$

gibt. Schließlich muss die Gleichung auch für konstant angenommenes y integrierbar sein, woher

$$\left(\frac{d.MQ}{da}\right) = \left(\frac{d.MR}{dx}\right)$$

wird, welche entwickelt

$$\text{III.} \quad M\left(\frac{dQ}{da}\right) - M\left(\frac{dR}{dx}\right) = R\left(\frac{dM}{dx}\right) - Q\left(\frac{dM}{da}\right)$$

liefert. Um nun daher den Multiplikator M völlig aus der Rechnung herauszuwerfen, wollen wir die erste dieser Gleichungen mit R multiplizieren, die zweite mit $-Q$ und die dritte mit P, und deren Aggregat wird auf der rechten Seite 0 liefern: Die Terme der linken Seite gaben aber durch M geteilt diese Gleichung an die Hand:

$$R\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)-\left(\frac{dQ}{dy}\right)\right]+Q\left[\left(\frac{dR}{dy}\right)-\left(\frac{dP}{da}\right)\right]+P\left[\left(\frac{dQ}{da}\right)-\left(\frac{dR}{dx}\right)\right]=0.$$

Also immer, wenn diese Bedingung keine Geltung hat, sind Gleichungen von solcher Art zwischen drei Variablen vollkommen unmöglich.

§7 Weil also auf vierfache Weise die Differentialgleichung für unendlich viele vorgelegte Kurven, welche wir einfach *zu schneidende Kurven* nennen werden, aufgestellt werden kann, wird es gefällig sein jede Gattung einzeln zu entwickeln, weil ja für die einzelnen eigene Vorschriften gefunden werden werden, um die gesuchte Kurve zu ermitteln, welche wir die *Trajektorie* nennen werden, wo sich freilich der zweite Fall mit dem ersten zusammen behandeln lassen wird.

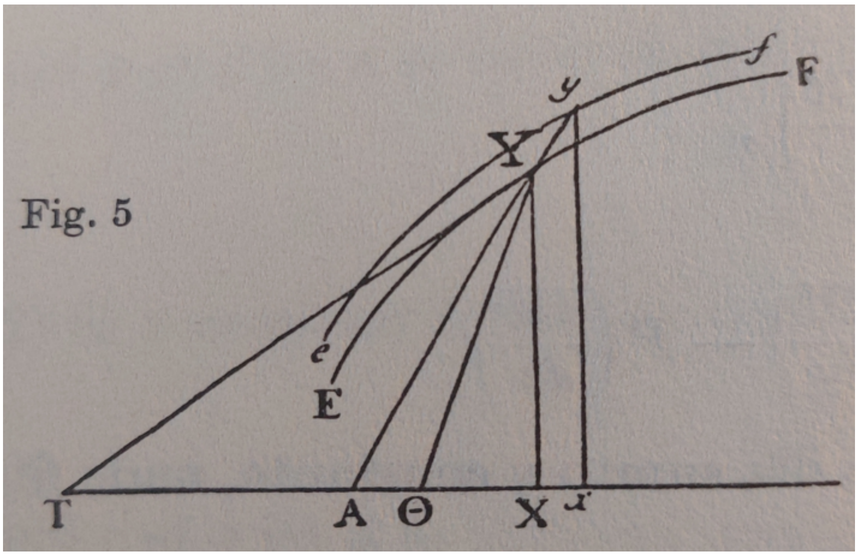
Fall I,
in welchem für die zu schneidenden Kurven die Ordinate y einer Funktion von x und a gleich wird

§8 Für die zu schneidenden Kurven wollen wir also festlegen, dass diese Differentialgleichung gegeben ist: $dy = pdx + qda$, sodass

$$\left(\frac{dp}{da}\right)=\left(\frac{dq}{dx}\right)$$

ist und wir wollen aus den zu schneidenden Kurven (Fig. 5)[5] irgendeine beliebige EYF betrachten,

[5]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.



welche die Trajektorie im Punkt Y schneide, und der Winkel, in welchem dieser Schnitt stattfinden muss, sei $= \alpha$. Weil nun derselbe Punkt Y so auf der zu schneidenden Kurve wie aus der Trajektorie liegt, wird sein Ort mit denselben Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$ bestimmt. Sofern er auf der zu schneidenden Kurven liegt, wird $dy = pdx + qda$: Sofern er aber auf der Trajektorie liegt, muss die Relation zwischen x und y erst ermittelt werden. Man zeichne nun die Gerade YT, welche die zu schneidende Kurve in Y berühre, und um die Lage dieser Gerade zu finden, weil sie ja auf dieselbe zu schneidende Kurve bezogen wird, wird der Parameter a als unveränderlich angenommen werden müssen, woher man $dy = pdx$ haben wird, und daher $\frac{dy}{dx} = p$; dort ist es offenkundig, dass die Größe p den Tangens des Winkels XYT ausdrückt, so dass, wenn wir diesen Winkel $XTY = \tau$ setzen, $p = \tan\tau$ sein wird. Aber für die Trajektorie sei ihre Tangente für denselben Punkt Y die Gerade $Y\Theta$, während der Winkel $X\Theta Y = \vartheta$ ist, natürlich wird

$$\frac{dy}{dx} = \tan\vartheta$$

sein, wo die Relation zwischen y und x die Trajektorie meint.

§9 Weil also der Schnittwinkel $= \alpha$ sein muss, muss ihm der Winkel $TY\Theta$ gleich sein, welchen die beiden Tangenten zueinander haben, woher folgt, dass $\alpha = \vartheta - \tau$ und daher $\vartheta = \tau + \alpha$ sein wird; daher folgert man

$$\tan\vartheta = \frac{\tan\tau + \tan\alpha}{1 - \tan\tau\tan\alpha}.$$

Weil aber $\tan\tau = p$ und $\tan\vartheta = \frac{dy}{dx}$ ist, wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + \tan\alpha}{1 - p\tan\alpha} \quad \text{und daher} \quad dy = \frac{p + \tan\alpha}{1 - p\tan\alpha}dx$$

sein. Aus dieser Gleichung muss also die Relation zwischen x und y ausfindig gemacht werden, und sie wird die Gleichung für die gesuchte Trajektorie liefern.

§10 Man betrachte nun den nächsten Punkt y der Trajektorie, welcher auf die nächste zu schneidende Kurve eyf fallen wird, deren Parameter also $a + da$ sein wird, woher seine Lage mit dieser Gleichung $dy = pdx + qda$ ausgedrückt werden wird. Wenn also hier der vorhergehende Wert von dy eingesetzt wird, wird man diese Gleichung

$$\frac{\tan\alpha + p}{1 - p\tan\alpha}dx = pdx + qda$$

haben, welche auf diese Form zurückgeführt wird

$$qda = \frac{\tan\alpha(1 + pp)}{1 - p\tan\alpha}dx,$$

welche nur zwei Variablen enthält, weil ja gemäß der Annahme p und q gegebene Funktionen von x und a sind. Daraus wird also die Relation zwischen x und a bestimmt werden können; daher, wenn der Wert von a durch x ausgedrückt wird und in der allgemeinen Gleichung für die zu schneidenden Kurven eingesetzt wird, wird eine Gleichung zwischen den zwei Variablen x und y entspringen, mit welcher die Natur der Trajektorie ausgedrückt werden wird.

§11 Weil ja aber die gefundene Gleichung zwischen x und a eine Differentialgleichung ist, wird in ihr Integral eine neue beliebige Konstante eingeführt werden können; je nachdem, ob dieser Konstante die einen oder die anderen Werte zugeteilt werden, werden unzählige Trajektorien entspringen, von welchen die einzelnen die zu schneidenden Kurven gleichermaßen in dem Winkel α durchlaufen werden; all diese werden in der allgemeinen durch Integration gefundenen Gleichung enthalten sein und deren variabler Parameter wird jene durch Integration eingeführte Konstante sein. Daher ist es klar, dass die zu schneidenden Kurven und die Trajektorien so zueinander reziprok sind, dass, wenn die Trajektorien als die zu schneidenden Kurven betrachtet werden, dann jene, die die zu schneidenden Kurven waren, nun die Trajektorien von jenen werden, und zwar in demselben Schnittwinkel α.

§12 Wenn also die orthogonalen Trajekorien verlangt werden, sodass der Schnittwinkel α ein rechter und $\tan\alpha = \infty$ ist, wird man für sie diese Gleichung haben

$$(1+pp)dx + pqda = 0,$$

welche also die wesentliche Formel für rechtwinklinge Trajektorien ist. Wenn wir aber wollen, dass der Schnittwinkel α verschwindet, wird die Gleichung $qda = 0$ oder $q = 0$ werden, welche Gleichung nicht weiter eine Differentialgleichung ist, woher nur eine einzige solche Trajektorie gegeben sein wird, die durch alle Punkte hindurchgehen wird, in welchen die beiden nächsten zu schneidenden Kurven sich gegenseitig durchlaufen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, diese Trajektorie wird alle zu schneidenden Kurven berühren. Wenn aber der Schnittwinkel α ein schiefer sein muss, wird das auf zwei Arten erhalten werden können, je nachdem, ob der spitze Winkel entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn festgelegt worden ist. Wenn also der Schnittwinkel schräg sein muss, dann wird $\tan\alpha$ so negativ wie positiv genommen werden können; und so wird auch diese Gleichung

$$qda = -\frac{\tan\alpha(1+pp)dx}{1+p\tan\alpha}$$

Genüge leisten; daher ist klar, dass diese Kurven von den vorhergehenden vollkommen verschieden sein werden. Es ist also nur übrig, dass wir das alles an einigen Beispielen verdeutlichen.

Beispiel 1

§13 Es seien die zu schneidenden Kurven alle vom selben Punkt A aus gezeichneten Geraden, für welche die allgemeine Gleichung also $y = \frac{ax}{c}$ sein wird, wo c eine konstante Größe, a aber jener variable Parameter ist; weil daher

$$dy = \frac{adx}{c} + \frac{xda}{c} \quad \text{ist, wird} \quad p = \frac{a}{c} \quad \text{und} \quad q = \frac{x}{c}$$

sein. Daher werden wir also, wenn wir anstelle von $\tan\alpha$ der Kürze wegen δ schreiben, für die Trajektorie diese Gleichung haben

$$xda = \frac{\delta(cc + aa)}{(c - \delta a)} dx,$$

welche Differentialgleichung zwischen x und a integriert werden muss. Direkt liefert aber die Trennung der Variablen

$$\delta \frac{dx}{x} = \frac{-\delta ada + cda}{cc + aa},$$

das Integral welcher Gleichung

$$\delta \log x = \arctan \frac{a}{c} - \delta \log \sqrt{cc + aa} + \delta \log C$$

oder

$$\delta \log \frac{x\sqrt{cc + aa}}{C} = \arctan \frac{a}{c}$$

ist. Hier wollen wir anstelle von C bc schreiben, sodass b der variable Parameter der Trajektorien ist, für welche man also diese Gleichung haben wird

$$\log \frac{x\sqrt{cc + aa}}{bc} = \frac{1}{\delta} \arctan \frac{a}{c},$$

wo δ der Tangens des Winkels ist, in welchem die Trajektorien alle vom Punkt A aus gezeichneten Geraden durchläuft, welche also natürlich eine logarithmische Spirale ist. Daher ist klar, wenn der Schnittwinkel ein rechter sein muss und daher $\delta = \infty$, dass dann sofort

$$x\sqrt{cc + aa} = bc$$

sein wird, woher wir

$$a = \frac{c\sqrt{bb - xx}}{x}$$

berechnen, welcher Wert in der allgemeinen Gleichung $y = \frac{ax}{c}$ eingesetzt die Gleichung

$$y = \sqrt{bb - xx}$$

für die Trajektorien liefert; daher ist klar, was per se offenkundig ist, dass die Trajektorien um den Mittelpunkt A herum, mit dem Radius b, beschriebene Kreise sind.

Beispiel 2

§14 Es seien die zu schneidenden Kurven (Fig. 1) alle um den Mittelpunkt C mit dem variablen Radius a beschriebenen Kreise, für welche also $y = \sqrt{aa - xx}$ ist, woher

$$dy = \frac{ada - xdx}{\sqrt{aa - xx}}$$

wird, welche Gleichung mit der allgemeinen Formel $dy = pdx + qda$ verglichen

$$p = -\frac{x}{\sqrt{aa - xx}} \quad \text{und} \quad q = \frac{a}{\sqrt{aa - xx}}$$

und daher

$$1 + pp = \frac{aa}{aa - xx}$$

liefert. Deswegen wird die Gleichung für die Trajektorien, indem man $\tan \alpha = \delta$ setzt,

$$\frac{ada}{\sqrt{aa - xx}} = \frac{\delta aadx}{(\delta x + \sqrt{aa - xx})\sqrt{aa - xx}}$$

oder

$$da = \frac{\delta adx}{\delta x + \sqrt{aa - xx}}$$

sein. Daher wird also, wenn der Schnittwinkel ein rechter oder $\delta = \infty$ sein muss, $da = \frac{adx}{x}$ und daher $a = bx$ sein, welcher Wert in der allgemeinen Gleichung $y = \sqrt{aa - xx}$ eingesetzt

$$y = x\sqrt{bb - 1} \quad \text{oder} \quad y = cx$$

gibt, welche Gleichung alle vom Mittelpunkt C aus gezeichneten Geraden in sich umfasst.

§15 Aber für schiefe Winkel stelle man die gefundene Gleichung in dieser Form dar

$$da\sqrt{aa-xx} = \delta(adx - xda);$$

dort bemerkte man, dass die Formel $adx - xda$ integrierbar gemacht wird, wenn sie durch eine homogene Funktion von zwei Dimension von a und x geteilt wird. Man teile also diese Gleichung durch $a\sqrt{aa-xx}$, dass

$$\frac{da}{a} = \frac{\delta(adx - xda)}{a\sqrt{aa-xx}}$$

hervorgeht. Es werde nämlich $x = av$, und unsere Gleichung wird diese Form annehmen

$$\frac{da}{a} = \frac{\delta dv}{\sqrt{1-vv}},$$

welche integriert

$$\log a = \delta \arcsin v + \log b = \delta \arcsin \frac{x}{a} + \log b$$

oder

$$\log \frac{a}{b} = \delta \arcsin \frac{x}{a}$$

gibt, wo b der variable Parameter der Trajektorien wird. Weil ja aber daher

$$xx + yy = aa \quad \text{wird, wird} \quad a = \sqrt{xx+yy}$$

sein, welcher Wert in die andere der beiden Gleichungen eingesetzt

$$\frac{x}{\sqrt{xx+yy}} = \sin \frac{1}{\delta} \log \frac{\sqrt{xx+yy}}{b}$$

oder

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{xx+yy}} = \frac{1}{\delta} \log \frac{xx+yy}{b}$$

gibt, welche also die Gleichung zwischen x und y für die Trajektorien ist. Aber aus der vorgelegten Gleichung $y = \sqrt{aa-xx}$ wollen wir ihren Wert $a = \sqrt{xx+yy}$ einsetzen, welchen wir der Kürze wegen $= z$ setzen, und für die Trajektorien wird

$$\log\frac{z}{b} = \delta\arcsin\frac{x}{z}$$

sein, wo, wenn φ jener Winkel ist, dessen Sinus $\frac{x}{z}$ ist, $\log\frac{z}{b} = \delta\varphi$ werden wird. Weil also z den Abstand des Punkts y vom Mittelpunkt C, φ aber das Komplement des Winkels, welchen die Gerade mit der Achse bildet, bezeichnet, ist es ersichtlich, dass der Logarithmus des Abstands z diesem Winkel proportional ist, worin die Natur der logarithmischen Spiralen besteht.

BEISPIEL 3

§16 Es seien nun (Fig. 2) alle zu schneidenden Kurven Kreise, die sich alle im Punkt A berühren, welche mit dieser Gleichung ausgedrückt werden

$$y = \sqrt{2ax - xx},$$

und weil

$$dy = \frac{adx - xdx + xda}{\sqrt{2ax - xx}}$$

ist, wird

$$p = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - xx}} \quad \text{und} \quad q = \frac{x}{\sqrt{2ax - xx}}$$

und daher

$$1 + pp = \frac{aa}{2ax - xx}$$

sein, woher man für die Trajektorien diese Gleichung haben wird:

$$\frac{xda}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{\delta aadx}{2ax - xx - \delta(x - a)\sqrt{2ax - xx}}$$

oder

$$xda\sqrt{2ax - xx} - \delta(a - x)xda = \delta aadx;$$

weil diese Gleichung homogen ist, setze man $x = at$, woher diese Gleichung hervorgehen wird:

$$\frac{da}{a} = \frac{\delta dt}{t\sqrt{2t - tt} + \delta tt - 2\delta t} = \frac{\delta dt}{t\sqrt{2t - tt} - \delta(2t - tt)},$$

welche Gleichung zwar separiert ist, aber ihre Integration springt nicht sofort ins Auge, obwohl dennoch immer aus der Natur der Sache leicht eingesehen wird, dass all diese Trajektorien immer Kreise sein werden.

§17 Wir wollen zuerst den Fall entwickeln, in welchem der Schnittwinkel ein rechter Winkel oder $\delta = \infty$ ist, und es wird

$$\frac{da}{a} = -\frac{dt}{2t - tt} = -\frac{dt}{2t} - \frac{dt}{2(2-t)}$$

werden, deren Integral

$$\log a = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\log(2-t) + \log b = \frac{1}{2}\log\frac{2-t}{t} + \log b$$

ist, und daher wird nach Rückkehr zu Zahlen $a = b\sqrt{\frac{2-t}{t}}$, sodass $a = n\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$ ist, woher, wegen $y = \sqrt{2ax - xx}$,

$$ax = b\sqrt{2ax - xx} = by$$

werden wird. Und so ist nur nötig, dass anstelle von a sein Wert aus der vorgelegten Gleichung eingesetzt wird, welcher $a = \frac{yy+xx}{2x}$ ist, und daher geht $yy + xx = 2by$ hervor, welche Gleichung natürlich eine für unendlich viele Kreise ist, wenn freilich der Parameter b, welcher der Radius dieser Kreise ist, als variabel angesehen wird. Und all diese Kreise werden die Achse im Punkt A berühren.

§18 Für die schiefen Winkel wird aber die Aufgabe am leichtesten erledigt werden, in man $\frac{2-t}{t} = vv$ setzt, sodass

$$t = \frac{2}{1+vv} \quad \text{und daher} \quad dt = -\frac{4vdv}{(1+vv)^2}$$

und

$$\sqrt{2t - tt} = \frac{2v}{1+vv}$$

ist, nach Einsetzen welcher Werte die Gleichung diese Form annehmen wird:

$$\frac{da}{a} = -\frac{\delta dv}{1 - \delta v},$$

deren Integral offenkundig

$$\log a = \log(1 - \delta v) + \log b \quad \text{oder} \quad a = b(1 - \delta v)$$

ist. Weil also $v = \sqrt{\frac{2-t}{t}} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}}$ ist, wird

$$a = b\left(1 - \delta\sqrt{\frac{2a - x}{x}}\right)$$

sein; die Gleichung, weil $\sqrt{2ax - xx} = y$ ist, wird $a = b\left(1 - \frac{\delta y}{x}\right)$ werden; und weil aus der vorgelegten Gleichung $a = \frac{xx+yy}{2x}$ ist, wird für die Trajektorien diese Gleichung zwischen x und y hervorgehen:

$$xx + yy = 2b(x - \delta y),$$

welche Gleichung offensichtlich eine für unendlich viele Kreise ist, wenn freilich die Größe b variabel angenommen wird. Obwohl also Beispiele dieser Art trivial erscheinen, sind sie dennoch besonders der Aufmerksamkeit würdig und geeignet, um die Kräfte in der Analysis zu erproben.

Beispiel 4

§19 Es sei (Fig. 6)[6] für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung vorgelegt:

$$y = a + \sqrt{cc - xx},$$

während c eine konstante Größe und a der variable Parameter ist,

[6] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

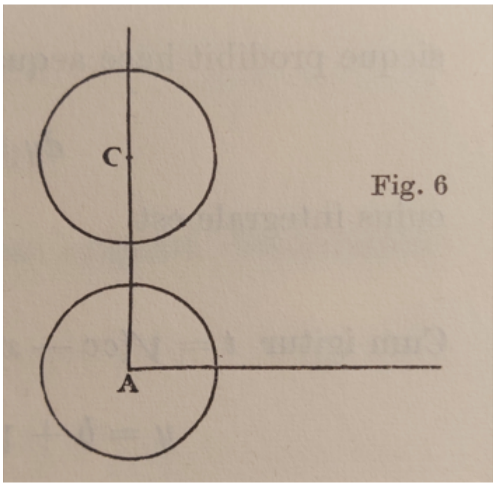


Fig. 6

welche Gleichung also unendlich viele einander gleiche und über einer Gerade platzierte Kreise enthält, welche Gerade zur Achse in A normal ist. Es werden also Kurven solcher Art gesucht, welche all diese Kreise in demselben Winkel α durchlaufen. Weil also hier

$$dy = da - \frac{xdx}{\sqrt{cc - xx}}$$

ist, wird

$$p = -\frac{x}{\sqrt{cc - xx}} \quad \text{und} \quad q = 1$$

sein, woher die Gleichung für die Trajektorien

$$da = \frac{\delta ccdx}{\sqrt{(cc - xx)}(\delta x + \sqrt{cc - xx})}$$

wird, in welcher sofort anstelle von da sein Wert aus der vorgelegten Gleichung eingesetzt werden kann, welcher

$$dy + \frac{xdx}{\sqrt{cc - xx}}$$

ist, woher

$$dy = \frac{\delta dx\sqrt{cc - xx} - xdx}{\delta x + \sqrt{cc - xx}}$$

wird; also besteht diese Gleichung zwischen den zwei Koordinaten x und y, welche sogar von sich aus direkt separiert sind.

§20 Wir wollen hier zuerst die rechtwinkligen Trajektorien betrachten, oder es sei $\delta = \infty$, und es wird

$$dy = \frac{dx}{x}\sqrt{cc - xx}$$

sein; um diese Gleichung zu integrieren, werde $\sqrt{cc - xx} = t$, und es wird

$$xx = cc - tt$$

sein, und nach Nehmen der logarithmischen Differentiale:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{cc - tt};$$

und so wird diese Gleichung hervorgehen:

$$dy = -\frac{ttdt}{cc - tt} = dt - \frac{ccdt}{cc - tt},$$

deren Integral

$$y = t - \frac{1}{2}c\log\frac{c + t}{c - t} + b$$

ist. Weil also $t = \sqrt{cc - xx}$ ist, wird

$$y = b + \sqrt{cc - xx} - \frac{1}{2}c\log\frac{c + \sqrt{cc - xx}}{c - \sqrt{cc - xx}}$$

sein, welche Kurve also eine transzendente mit Logarithmen zu konstruierende ist; daher ist sofort klar, dass für $x = 0$ genommen $y = -\infty$ wird, aber für $x = c$ genommen $y = b$ wird. Um aber die Form der Kurve an diesem Punkt zu suchen, wollen wir $x = c - c\omega$ setzen, während ω gleichsam unendlich klein wird, und es wird

$$\sqrt{cc - xx} = c\sqrt{2\omega - \omega\omega} = c\sqrt{2\omega}\left(1 - \frac{\omega}{4} - \frac{\omega\omega}{32}\right)$$

sein, und daher

$$\frac{c+\sqrt{cc-xx}}{c-\sqrt{cc-xx}} = \frac{1+\sqrt{2\omega-\omega\omega}}{1-\sqrt{2\omega-\omega\omega}} = \frac{1+\sqrt{2\omega}\left(1-\frac{\omega}{4}-\frac{\omega\omega}{32}\right)}{1-\sqrt{2\omega}\left(1-\frac{\omega}{4}-\frac{\omega\omega}{32}\right)}.$$

Wir wollen der Kürze wegen

$$\sqrt{2\omega}\left(1-\frac{\omega}{4}-\frac{\omega\omega}{32}\right) = \Omega$$

setzen, dass

$$y = b + c\Omega - \frac{1}{2}c\log\frac{1+\Omega}{1-\Omega}$$

ist, wo Ω eine gleichsam unendlich kleine Größe ist. Dann ist aber bekannt, dass

$$d.\frac{1}{2}\log\frac{1+\Omega}{1-\Omega} = \frac{d\Omega}{1-\Omega\Omega} = d\Omega\left(\frac{1}{1-\Omega\Omega}\right) = d\Omega(1+\Omega^2+\Omega^4+\text{etc.})$$

und daher

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\Omega}{1-\Omega} = \Omega + \frac{1}{3}\Omega^3 + \frac{1}{5}\Omega^5 + \text{etc.}$$

ist, nach Einsetzen welcher Werte $y = b - \frac{1}{3}c\Omega^3$ werden wird. Es ist aber $\Omega^3 = 2\omega\sqrt{2\omega}$, und so geht

$$y = b - \frac{2}{3}c\omega\sqrt{2\omega}$$

hervor; daher ist klar, dass die Trajektorie in diesen Punkten eine Spitze ähnlich der zweiten kubischen Parabel haben wird.

§21 Aber für die schiefen Winkel, weil wir

$$dy = \frac{\delta dx\sqrt{cc-xx}-xdx}{\delta x+\sqrt{cc-xx}}$$

gefunden haben, wollen wir für die Integration dieser Gleichung, die natürlich eine nicht geringe Gewandtheit verlangt,

$$\frac{\delta\sqrt{cc-xx}-x}{\delta x+\sqrt{cc-xx}} = t$$

setzen, und es wird

$$\sqrt{cc - xx} = \frac{x(1+\delta t)}{\delta - t}$$

sein, woher man

$$x = \frac{c(\delta - t)}{\sqrt{(1+\delta\delta)(1+tt)}} = \frac{c}{\sqrt{1+\delta\delta}} \cdot \frac{\delta - t}{\sqrt{1+tt}}$$

berechnet, und daher

$$dx = -\frac{c}{\sqrt{1+\delta\delta}} \left(\frac{dt + \delta t dt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Weil also $dy = tdx$ ist, wird

$$-\frac{dy\sqrt{1+\delta\delta}}{c} = \frac{tdt + \delta ttdt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{tdt - \delta dt + \delta dt(1+tt)}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher

$$-\frac{dy\sqrt{1+\delta\delta}}{c} = \frac{tdt - \delta dt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta dt}{\sqrt{1+tt}}$$

sein. Es ist aber

$$\int \frac{tdt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1+tt}},$$

$$\int \frac{dt}{(1+tt)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{1+tt}}$$

und

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+tt}} = \log(t + \sqrt{1+tt}),$$

weswegen wir durch Integrieren

$$\frac{\sqrt{1+\delta\delta}}{c}(b-y) = -\frac{(1+\delta t)}{\sqrt{1+tt}} + \delta \log(t + \sqrt{1+tt})$$

haben werden, wo man bemerke, dass

$$t = \frac{\delta\sqrt{cc-xx}-x}{\delta x+\sqrt{cc-xx}}$$

ist, sodass diese Kurve auch von Logarithmen abhängt.

§22 Hier zeigt sich aber eine andere um vieles gefälligere Methode dieselbe Integration mit Winkeln zu erledigen. Man setze nämlich $x = c\sin\varphi$, es wird

$$\sqrt{cc-xx} = c\cos\varphi \quad \text{und} \quad dx = cd\varphi\cos\varphi$$

sein, woher

$$dy = cd\varphi\cos\varphi\left(\frac{\delta\cos\varphi-\sin\varphi}{\delta\sin\varphi+\cos\varphi}\right)$$

oder

$$dy = cd\varphi\cos\varphi\left(\frac{\delta-\tan\varphi}{\delta\tan\varphi+1}\right)$$

hervorgehen wird. Weil also $\delta = \tan\alpha$ ist, wird

$$dy = cd\varphi\cos\varphi\left(\frac{\tan\alpha-\tan\varphi}{1+\tan\alpha\tan\varphi}\right)$$

oder

$$dy = cd\varphi\cos\varphi\tan(\alpha-\varphi)$$

sein. Hier schreibe man weiter anstelle von φ $\alpha-(\alpha-\varphi)$, dass

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos(\alpha-\varphi)+\sin\alpha\sin(\alpha-\varphi)$$

ist, nach Einsetzen welches Wertes

$$dy = cd\varphi\left[\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)+\frac{\sin\alpha\sin^2(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)}\right]$$

oder

$$dy = cd\varphi\left[\cos\alpha\sin(\alpha-\varphi)+\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha-\varphi)}-\sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)\right]$$

sein wird, welche Gleichung auf diese zurückgeführt wird:

$$dy = cd\varphi \left(\frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha - \varphi)} - \sin \varphi \right),$$

und daher findet man durch Integrieren

$$y = c \sin \alpha \int \frac{d\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} + c \cos \varphi + b.$$

Für das erste Glied sei $\alpha - \varphi = 90^\circ - \omega$ und daher $d\varphi = d\omega$, und es wird

$$\int \frac{d\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)} = \int \frac{d\omega}{\sin \omega} = \log \tan \frac{1}{2}\omega = \log \left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varphi \right)$$

sein, weshalb die Integralgleichung

$$y = b + c \cos \varphi + c \sin \alpha \log \tan \left(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\varphi \right)$$

sein wird, während $x = c \sin \varphi$ ist. Und so wird sich für jeden Winkel φ so x wie y angeben lassen.

Beispiel 5

§23 Es sei für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung vorgelegt:

$$y = \frac{a}{c}\sqrt{cc - xx},$$

welche unendlich viele über derselben Achse $= 2c$ konstruierte Ellipsen umfasst, und weil

$$dy = \frac{da}{c}\sqrt{cc - xx} - \frac{axdx}{c\sqrt{cc - xx}}$$

ist, wird

$$p = -\frac{ax}{c\sqrt{cc - xx}} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{c}\sqrt{cc - xx}$$

sein, woher man für die Trajektorie

$$da(cc - xx) = \frac{\delta dx(c^4 + (aa - cc)xx)}{c\sqrt{cc - xx} + \delta ax}$$

haben wird; wie diese Gleichung behandelt werden muss, wird nicht leicht erkannt.

§24 Wir wollen also den Fall entwickeln, in dem $\delta = 0$ ist, für welchen wir

$$da(cc - xx) = \frac{(c^4 + (aa - cc)xx)dx}{ax}$$

haben werden. Man setze hier $\sqrt{cc - xx} = t$, es wird

$$xx = cc - tt \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{cc - tt}$$

sein, und unsere Gleichung wird diese Form annehmen:

$$attda = -\frac{tdt}{cc - tt}(aacc - aatt + cctt),$$

oder

$$attda + aatdt = -\frac{cct^3dt}{cc - tt},$$

woher durch Integrieren

$$\frac{1}{2}aatt = -cc\int \frac{t^3dt}{cc - tt} = \frac{1}{2}cctt + c^4 \log \sqrt{cc - tt} + C$$

wird. Nachdem also für t wieder der Wert $\sqrt{cc - xx}$ eingesetzt worden und mit 2 multipliziert worden ist, berechnet man

$$aa(cc - xx) = C + cc(cc - xx) + c^4 \log xx.$$

Aber auch der vorgelegten Gleichung ist

$$aa = \frac{ccyy}{cc - xx},$$

nach Einsetzen welches Wertes wird man diese Gleichung zwischen x und y für die Trajektorie haben wird:

$$yy = bb - xx + cc \log xx.$$

Phänomene dieser Trajektorien

§25 Die Form dieser Trajektorien zeigt gewisse völlig einzigartige Phänomene, die, weil sie nicht offensichtlich sind, einer ausführlicheren Erklärung würdig scheinen. Es sei also (Fig. 7)[7] CDc die Hälfte irgendeiner jener über der gemeinsamen Achse $CAc = 2c$ konstruierten Achse, deren andere Halbachse AD also $= a$ sein wird;

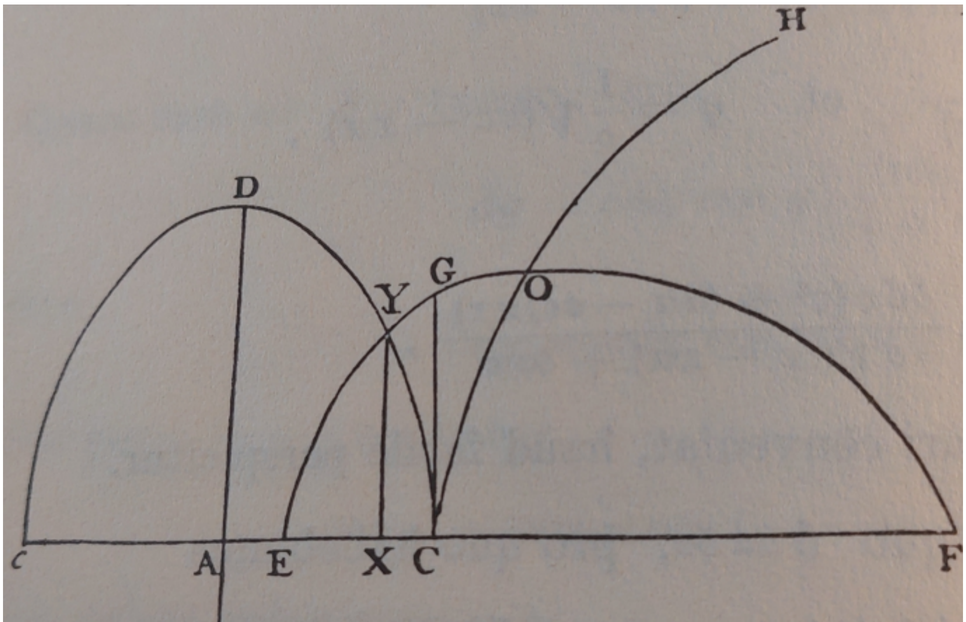


Fig. 7

und weil all diese Kurven mit den zwei Durchmessern Cc und Dd versehen sind, müssen dieselben auch die Durchmesser der Trajektorien sein, von denen also ein Viertel der einen die Kurve EGF sein, für welche wir zwischen der Abszisse $AX = x$ und $XY = y$ diese Gleichung erhalten haben:

$$yy = bb - xx + cc \log xx,$$

wo sich freilich anstelle von c die Einheit schreiben lassen wird, dass

$$yy = bb - xx + \log xx$$

ist, in welcher wir anstelle von $\log xx$ nicht $2 \log x$ geschrieben haben, weil andernfalls die Gleichung imaginär werden würde, wenn man x negativ nähme. Denn auf diese Weise Gleichung wird dieselbe bleiben, ob so x wie y positiv oder negativ genommen werden.

[7] Dieser Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

§26 An zweiter Stelle bemerke ich, dass diese Trajektorie nur reell sein kann, wenn ihr Parameter b die Einheit übersteigt, was ich so zeige. Man setze $\log xx = v$, dass

$$xx = e^v = 1 + v + \frac{vv}{2} + \frac{v^3}{6} + \text{etc.}$$

wird, woher

$$yy = bb - 1 - \frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6} - \text{etc.}$$

sein wird, welcher Ausdruck, solange $b < 1$ ist, gewiss negativ ist; aber für $b = 1$ wird

$$yy = -\frac{vv}{2} - \frac{v^3}{6} - \text{etc.}$$

werden, welche Gleichung nur bestehen kann, wenn $v = 0$ ist; dann wird aber $x = 1$ und $y = 0$ sein. In diesem Fall fällt die ganze Trajektorie EGF in dem Punkt C zusammen, welchem freilich ein ähnlicher Punkt auf der anderen Seite von c entsprechen wird.

§27 Es sei also $b > 1$, und nach Nehmen von $x = 1 = AC$ wird $yy = bb - 1$ sein, und daher die Ordinate $CG = \sqrt{bb-1}$. Auf beiden Seiten werden aber Punkte E und F angegeben werden können, wo die Ordinate y verschwinden wird und die Kurve normal zur Kurve verläuft. Weil nämlich für $\log xx = v$

$$bb - 1 - \frac{1}{2}vv - \frac{1}{6}v^3 = 0 \quad \text{und daher} \quad bb - 1 = \frac{1}{2}vv + \frac{1}{6}v^3$$

wird, ist es ersichtlich, dass für v zwei Werte gegeben sind, der eine positiv, der andere negativ. Wenn nämlich bb die Einheit unendlich wenig übersteigt, wird

$$\text{so} \quad v = +\sqrt{2(bb-1)} \quad \text{wie} \quad v = -\sqrt{2(bb-1)}$$

sein. Im ersten Fall wird die Abszisse x größer als die Einheit sein und wird den Punkt F auf der Trajektorie geben; wenn aber v negativ ist, wird die Abszisse x kleiner als die Einheit und wird für die Trajetorie den Punkt E geben. Aber für die größeren Werte von b, weil die Logarithmen von größeren Zahlen in Bezug zur Zahl selbst sehr klein sind, wird für den größeren Wert

AF näherungsweise $xx = bb + \log bb$ sein; daher ist klar, dass $x > b$ sein wird. Für den negativen Wert wird aber näherungsweise

$$\log xx = -bb \quad \text{und daher} \quad xx = \frac{1}{e^{bb}}$$

werden, welche Größe möglichst klein wird, sobald b mäßig die Einheit übersteigt, in welchem Fall also der Punkt E sehr nahe an A herankommt: Er kann aber nicht auf ihn selbst fallen, außer b wird unendlich.

§28 Daher sehen wir also, dass der größere Teil EGF der Trajektorie außerhalb der zu schneidenden Kurve liegt, das scheint der Natur der Sache zu widersprechen, weil in dieser Region keine zu schneidenden Kurven aufzutauchen scheinen. Aber weil für die zu schneidenden Kurven diese allgemeine Gleichung angenommen worden ist:

$$y = \frac{a}{c}\sqrt{cc - xx},$$

wo wir annehmen, dass dem Buchstaben a vollkommen alle Werte nacheinander zugeteilt werden, dürfen davon auch die imaginären Werte nicht ausgeschlossen werden, solange sie reelle Kurven darbieten. Es ist aber offensichtlich, wenn anstelle von a $a\sqrt{-1}$ geschrieben wird, dass dann

$$y = \frac{a}{c}\sqrt{xx - cc}$$

sein wird, welche Gleichung natürlich unendlich viele auf dieselbe transverse Achse Cc bezogene Hyperbeln enthalten, welche vom Anteil GF in O normal von der Trajektorie geschnitten werden.

§29 Diese Dinge kommen für einen orthogonalen Schnittwinkel in Betracht; wenn aber schiefwinklige Schnitte verlangt werden, die aus dieser Gleichung:

$$da(cc - xx) = \frac{\delta(c^4 + (aa - cc)xx)dx}{c\sqrt{cc - xx} + \delta ax}$$

zu bestimmen sind, sind wir gezwungen zu gestehen, dass bis jetzt diese Gleichung mit keinen bekannten Kunstgriffen aufgelöst werden konnte; und diese Schwierigkeit tritt meist auf, wannimmer für die zu schneidenden Kurven die Gleichungen ein wenig komplizierter angenommen werden; daher ist schon vor langer Zeit die Frage entstanden, wie Gleichungen für die zu schneidenden Kurven beschaffen sein muss, dass sich die Gleichung für die Trajektorien auflösen lässt. Weil diese aber allgemein keineswegs geleistet werden kann, wollen wird hier einen vollkommen einzigartigen Fall entwickeln, weil ja daraus schon vor einiger Zeit sehr schöne Zuwächse in der Analysis ermöglicht worden sind.

Entwicklung eines einzigartigen Falles

§30 Wir wollen also für die zu scheidenden Kurven die allgemeine Gleichung:

$$dy = pdx + qda$$

betrachten, wo p und q Funktionen von x und a von solcher Art sind, dass $\left(\frac{dp}{da}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$ ist; und die Frage geht nun darauf zurück, dass die für die Trajektorien [§ 10] gefundene Gleichung:

$$qda = \frac{\delta(1+pp)dx}{1-\delta p}$$

auch integrierbar wird, oder dass sie einen Multiplikator zulässt, durch welchen sie integrierbar gemacht wird. Weil sich das auch im Allgemeinen nicht erhoffen lässt, wollen wir nach den Fällen suchen, in denen dieser Multiplikator eine Funktion nur von a sein kann. Es bezeichne also A diese Funktion, sodass diese Form

$$Aqda - \frac{\delta Adx(1+pp)}{1-\delta p}$$

integrierbar wird. Um das zu erreichen, setze man der Kürze wegen

$$\frac{\delta(1+pp)}{\delta p - 1} = P,$$

sodass P eine Funktion von p ist; und nun wird verlangt, dass diese Formel:

$$Aqda + APdx$$

integrierbar wird.

§31 Nach der allgemeinen Regel muss also

$$\left(\frac{d.Aq}{dx}\right) = \left(\frac{d.AP}{da}\right)$$

sein. Hier gibt aber der erste Teil entwickelt $A \cdot \left(\frac{dq}{dx}\right)$. Wir haben aber gesehen, dass $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{da}\right)$ ist, und so werden wir aus diesem Teil $A \cdot \left(\frac{dp}{da}\right)$ haben. Für den anderen Teil sei $dP = P'dp$, woher, weil hier allein a für die Variable gehalten wird, $\left(\frac{dP}{da}\right) = P' \cdot \left(\frac{dp}{da}\right)$ sein wird, dann aber, weil A eine Funktion allein von a ist, wird $\left(\frac{dA}{da}\right) = \frac{dA}{da}$ sein. Daher werden wir also für den anderen Teil haben:

$$\left(\frac{d.AP}{da}\right) = P \cdot \frac{dA}{da} + aP'\left(\frac{dp}{da}\right).$$

Aus diesen wird also die Integrationsbedingung

$$A\left(\frac{dp}{da}\right) = P \cdot \frac{dA}{da} + AP'\left(\frac{dp}{da}\right)$$

sein, in welcher Gleichung allein die Größe a als Variable betrachtet wird, während die andere x quasi als Konstante angesehen wird.

§32 Wir wollen also in dieser Gleichung die Größe x als völlig konstant betrachten, wonach natürlich $\left(\frac{dp}{da}\right) = \frac{dp}{da}$ sein wird, und daher wird durch Multiplikation mit da diese Differentialgleichung entspringen: $Adp = PdA + AP'dp$, welche, wegen $P'dp = dP$, in diese Form übergeht: $Adp = PdA + AdP$, welche durch AP geteilt

$$\frac{dp}{P} = \frac{dA}{A} + \frac{dP}{P}$$

wird, wo sich anstelle der Konstante irgendeine Funktion von x hinzufügen lässt, sodass wir nun

$$\int \frac{dp}{P} = \log \frac{AP}{X}$$

haben, und diese Gleichung umfasst eine Relation von solcher Art, woraus sich die gesuchten Trajektorien bestimmen lassen werden.

§33 Weil also in unserem Fall $P = \frac{\delta(1+pp)}{\delta p - 1}$ ist, wird

$$\frac{dp}{P} = \frac{(\delta p - 1)dp}{\delta(1+pp)}$$

sein. Daher berechnet man durch Integrieren

$$\int \frac{dp}{P} = \log\sqrt{1+pp} - \frac{1}{\delta}\arctan p,$$

woher unsere Gleichung

$$0 = \frac{1}{\delta}\arctan p + \log\frac{AP}{X\sqrt{1+pp}}$$

oder

$$0 = \frac{1}{\delta}\arctan p + \log\frac{\delta A\sqrt{1+pp}}{(\delta p - 1)X}$$

sein wird; wenn sich aus dieser Gleichung der Wert von p durch A und X finden ließe, woher zugleich der Wert von q gegeben wäre, hätte man für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung: $dy = pdx + qda$, für die Trajektorien würde aber diese Gleichung gelten, die wir gerade zwischen x und a gefunden haben, von welchen A und X irgendwelche nach Belieben anzunehmenden Funktionen sind, sodass wir daher nun eine ziemlich allgemeine Gleichung für die zu schneidenden Kurven erhalten, deren Trajektorien sich tatsächlich darbieten lassen.

§34 Weil sich aber ja daher im Allgemeinen der Wert von p nicht durch x und a finden lässt, wollen wir den Fall entwickeln, in welchem der Schnittwinkel ein rechter sein muss, oder $\delta = \infty$ ist; dann muss also

$$\log\frac{A\sqrt{1+pp}}{pX} = 0 = \log 1$$

werden, und so wird $A\sqrt{1+pp} = pX$ sein, woher man

$$p = \frac{A}{\sqrt{XX - AA}}$$

findet, sodass man für die zu schneidenden Kurven diese Differentialgleichung hat:

$$dy = \frac{Adx}{\sqrt{XX - AA}} + qda,$$

wo freilich q den Wert hat, den die Integrierbarkeit dieser Formel erfordert, nämlich dass $\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{dp}{da}\right)$ ist. Weil also, nachdem allein a als Variable angenommen worden ist,

$$dp = \frac{XXdA}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, wird

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dA}{da} \cdot \frac{XX}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}}$$

sein. Wenn man also nun allein x als variabel annimmt, wird

$$dq = \frac{dA}{da} \cdot \frac{XXdx}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}}$$

und daher

$$q = \frac{dA}{da} \cdot \int \frac{XXdx}{(XX - AA)^{\frac{3}{2}}}$$

sein, in welcher Integralformel allein x als variabel anzunehmen ist. Aber dann müssen die Trajektorien aus dieser Differentialgleichung:

$$qda = -\frac{(1 + pp)dx}{p} = -\frac{XXdx}{A\sqrt{XX - AA}}$$

bestimmt werden; weil diese per Annahme durch Multiplikation mit A integrierbar gemacht worden ist, wird für die Trajektorien diese per se integrierbare Gleichung gelten:

$$Aqda + \frac{XXdx}{\sqrt{XX - AA}} = 0,$$

deren Integral der konstanten Größe C gleich gesetzt eine bestimmte Relation zwischen x und a geben wird, aus welcher, wenn der Wert von x durch a definiert in der Gleichung für die zu schneidenden Kurven eingesetzt wird, man eine Gleichung zwischen x und y für die Trajektorien, und zwar unendlich viele, erhalten wird, wenn freilich der Konstante C nacheinander alle Werte zugeteilt werden.

§35 Weil also diese für p und q gefundenen Werte die Gleichung $dy = pdx + qdy$ integrierbar machen, wird ihr Integral natürlich

$$y = \int pdx = \int \frac{Adx}{\sqrt{XX - AA}}$$

sein, wenn freilich hier die Größe A konstant angenommen wird, sodass man für die zu schneidenden Kurven diese Integralgleichung hat:

$$y = \int \frac{Adx}{\sqrt{XX - AA}} :$$

wenn freilich in dieser Integration der Parameter a wie eine Konstante behandelt wird; daher ist klar, was für eine Funktion von x auch immer für X angenommen wird, dass diese Gleichung:

$$y = \int \frac{Adx}{\sqrt{XX - AA}}$$

immer Kurven solcher Art enthält, und zwar unendlich viele, wenn nach der Integration A oder a alle möglichen Werte zugeteilt werden. Aber dann werden sich für all diese Kurven orthogonale Trajektorien mithilfe dieser Gleichung angeben lassen:

$$\int \frac{XXdx}{\sqrt{XX - AA}} = C;$$

dort ist natürlich wiederum die Größe A als konstant zu behandeln. Denn aus dieser, wenn der Wert von A durch X bestimmt wird und in der schon integrierten Gleichung für die zu schneidenden Kurven eingesetzt wird, wird eine Gleichung zwischen x und y für die Trajektorien hervorgehen, von welchen der variable Parameter im Buchstaben C enthalten sein wird. Weil aber all dies im Allgemeinen betrachtet nicht wenig verwirrend erscheinen mag, wird es förderlich sein, die Angelegenheit an einigen Beispielen zu illustrieren.

Beispiel 1

§36 Es sei $X = \sqrt{x}$ und $A = \sqrt{a}$, dass für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung hervorgeht:

$$y = \int \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{x - a}} = 2\sqrt{ax - aa},$$

welche unendlich viele Parabeln in sich umfasst, von welchen der Parameter jeder einzelnen $= 4a$ und der Scheitel vom festen Punkt A um das Intervall $= a$ entfernt ist. Nachdem also diese Parabeln beschrieben worden sind, werden die orthogonalen Trajektorien aus dieser Gleichung zu bestimmen sein:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x-a}} = C,$$

oder wir werden durch Integrieren für diese Kurven $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a} = C$ haben. Nachdem also diese Gleichung mit der oberen $y = 2\sqrt{ax-aa}$ verbunden worden ist, eliminiere man die Größe a und es wird eine Gleichung nur zwischen x und y hervorgehen; nach der Rechnung gelangt man aber zu dieser Gleichung:

$$(x^3 + 3xyy + C)^2 = (xx - yy)^3,$$

welche eine für eine Kurve sechster Ordnung ist.

BEISPIEL 2

§37 Man nehme $X = \frac{1}{x}$ und $A = \frac{1}{a}$, und für die zu schneidenden Kurven wird diese Gleichung entspringen:

$$y = \int \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = \sqrt{aa-xx},$$

welche unendlich viele konzentrische Kreise umfasst. Aber für die Trajektorien wird die Gleichung

$$\int \frac{adx}{x\sqrt{aa-xx}} = C$$

sein, welches Integral freilich transzendent ist. Weil aber für $x = at$ gesetzt diese Formel

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{1-tt}} = C$$

wird, ist daher klar, dass eine bestimmte Funktion von t eine Konstante sein muss; daraus ist es offenkundig, dass auch die Größe t selbst eine konstante Größe sein muss, das heißt, $\frac{x}{a}$ wird eine konstante Größe sein, beispielsweise n, sodass $a = \frac{x}{n}$ ist, welcher Wert in der allgemeinen Gleichung eingesetzt

$$y = \frac{x\sqrt{1-nn}}{n}$$

liefert, welche Gleichung offensichtlich unendlich viele gerade Linien enthält, und dieser Fall ist umso bemerkenswerter, weil, wenn wir auf die übliche Weise die Integration hätten ausführen wollen, kaum klar gewesen wäre, wie daraus zu den geraden Trajektorien hätte gelangt werden können.

§38 Aus diesen Ausführungen wird zur Genüge erkannt, von welch großem Umfang die Untersuchung dieser Gleichung war:

$$y = \int \frac{Adx}{\sqrt{XX-AA}},$$

weil sie ja aus der Natur der Funktionen von zwei Variablen abgeleitet worden ist, die zu jener Zeit noch völlig unbekannt gewesen war. Aber der erste, der dieses wunderschöne Beispiel einer solchen Analysis vorgebracht hat, schon vor sechzig Jahren, war der scharfsinnigste Nicolaus Bernoulli, der Sohn von Nicolaus, Professor für Jura in der Universität von Basel; ihm sind also die größten Zuwächse, welche daher später in die Analysis eingegangen sind, zum größten Teil zu verdanken.

§39 Obwohl aber auf diese Weise eine hinreichend allgemeine Gleichung für die zu schneidenden Kurven dargeboten worden ist, woher sich die Trajektorien finden lassen, ist dennoch dafür eine, wie wir gesehen haben, höchst lästige Rechnung notwendig, und die Kurven, die daraus abgeleitet werden, sind meistens höchst transzendent. Wenn also algebraische Trajektorien verlangt werden, lässt sich daher fast keine Hilfe erwarten. Aber der folgende Fall, wo wir den variablen Parameter a durch die beiden Koordinaten x und y ausgedrückt angenommen haben, wird eine höchst ergiebige Quelle für das Finden von algebraischen Trajektorien schenken.

Fall II

IN WELCHEM DER VARIABLE PARAMETER a DURCH DIE BEIDEN KOORDINATEN x UND y AUSGEDRÜCKT WERDEN KANN.

§40 Weil also in diesem Fall der Parameter a einer gewissen Funktion der zwei Koordinaten x und y gleich wird, wird die Differentialgleichung eine solche Form haben: $da = pdy + qdy$, wo p und q Funktionen von x und y von solcher Art sein werden, dass

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$$

ist, und von den zu schneidenden Kurven (Fig. 5) wollen wir eine beliebige EYF betrachten, welche die Trajektorie im Punkt Y schneide, und der Winkel, in welchem dieser Schnitt geschehen muss, sei $= \alpha$. Weil nun derselbe Punkt Y so in der zu schneidenden Kurve wie auf der Trajektorie liegt und sein Ort durch dieselben Koordinaten $AX = x$ und $XY = y$ bestimmt wird, wird, sofern der Punkt Y auf der zu schneidenden Kurven liegt, $da = pdx + qdy$ sein; sofern er aber auf der Trajektorie liegt, muss die Relation zwischen x und y erst ermittelt werden. Man zeichne nun die Gerade YT, welche die zu schneidende Kurve in Y berühre, und um die Lage dieser Gerade zu finden, weil sie ja auf dieselbe zu schneidende Kurve bezogen ist, wird der Parameter a als unveränderlich angenommen werden müssen, woher wir

$$dy = -\frac{pdx}{q} \quad \text{und daher} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$$

haben, wo es offensichtlich ist, dass der Bruch $-\frac{p}{q}$ den Tangens des Winkels XTY ausdrückt; wenn dieser $= \tau$ ist, wird

$$\tan\tau = -\frac{p}{q}$$

sein. Aber für die Trajektorie sei ihre Tangente für denselben Punkt Y die Gerade $Y\Theta$, während der Winkel $X\Theta Y = \vartheta$ ist, es wird natürlich

$$\frac{dy}{dx} = \tan\vartheta$$

sein, wo die Relation zwischen y und x die Trajektorie beschreibt.

§41 Weil also der Schnittwinkel $TY\Theta = \alpha$ sein muss, wird $\vartheta = \tau + \alpha$ und daher

$$\tan\vartheta = \frac{\tan\alpha + \tan\tau}{1 - \tan\alpha\tan\tau}$$

sein; daher wird man nach Einsetzen der Werte für die Trajektorien diese Gleichung haben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q\tan\alpha - p}{q + p\tan\alpha},$$

und wenn wir, wie bisher, für $\tan\alpha$ δ schreiben, wird

$$dy = \frac{(\delta q - p)dx}{q + \delta p}$$

sein; wenn also der Schnittwinkel α ein rechter sein muss, wird für die othogonalen Trajektorien diese Gleichung gelten:

$$dy = \frac{qdx}{p} \quad \text{oder} \quad pdy = qdx;$$

wenn aber der Schnittwinkel α verschwinden muss, dass $\delta = 0$ ist, wird

$$dy = -\frac{pdx}{q} \quad \text{oder} \quad pdx + qdy = 0$$

sein. Weil also $da = pdx + qdy$ ist, ist klar, dass in diesem Fall $da = 0$ ist, sodass a konstant sein muss: In diesem Fall werden natürlich die Trajektorien mit den zu schneidenden Kurven zusammenkommen. Um also das Vermögen dieser Methode besser zu erkennen, wollen wir sie an einigen Beispielen illustrieren.

Beispiel 1

§42 Es seien zuerst alle zu schneidenden Kurven Geraden, die vom selben Punkt A der Achse aus gezeichnet worden sind und für welche die allgemeine Gleichung $y = \frac{ax}{b}$ sein wird, wo a als variabler Parameter angesehen werde, während b konstant bleibt. Aus dieser Gleichung wird also $a = \frac{by}{x}$ und daher

$$da = \frac{bxdy - bydx}{xx}$$

sein, woher $p = -\frac{by}{xx}$ und $q = \frac{b}{x}$ wird, woher für die Trajektorien diese Gleichung entspringen wird:

$$dy = \frac{(\delta x + y)dx}{x - \delta y} \quad \text{oder} \quad dy(x - \delta y) = dx(\delta x + y).$$

Mit dieser Methode für die Trajektorien gelangen wir natürlich sofort zu einer Differentialgleichung zwischen x und y, während mit der vorhergehenden Methode erst über viele Umwege eine solche Gleichung gefunden werden musste, weswegen diese Methode der vorhergehenden weit vorzuziehen scheint.

§43 Für diese Trajektorien wollen wir zuerst den Schnittwinkel α als rechtwinklig festlegen, dass $\delta = \infty$ ist, und unsere Gleichung wird $xdx + ydy = 0$ sein, deren Integral sofort $xx + yy = cc$ gibt, welche Gleichung unendlich viele um den Punkt A herum beschriebene konzentrische Kreise enthält, von welchen natürlich der Radius c als Variable angesehen werden kann.

§44 Aber für die schiefen Winkel stelle man die Gleichung in dieser Form dar:

$$xdy - ydx = \delta(xdx + ydy),$$

welche durch $xx + yy$ geteilt von selbst integrierbar wird: Es wird nämlich

$$\int \frac{xdy - ydx}{xx + yy} = \arctan \frac{y}{x}$$

sein, sowie

$$\int \frac{xdx + ydy}{xx + yy} = \log \sqrt{xx + yy}$$

und so wird man

$$\arctan \frac{y}{x} = \delta \log \sqrt{xx + yy}$$

haben. Wenn daher nun der Winkel $XAY = \omega$ genannt wird, dass $\tan \omega = \frac{y}{x}$ und

$$AY = z = \sqrt{xx + yy}$$

ist, wird $\omega = \delta \log z$ sein, sodass dieser Winkel den Logarithmus des Abstands $AY = z$ misst, welche Linien also logarithmische Spiralen sein werden, die die einzelnen Geraden AY in dem Winkel, dessen Tangens $= \delta$ ist, schneiden.

Beispiel 2

§45 Es seien die zu schneidenden Kurven alle Kreise, die die Achse AX in A normal schneiden und die in dieser Gleichung: $y = \sqrt{2ax - xx}$ enthalten sind, und es wird

$$a = \frac{xx + yy}{2x}$$

sein und daher durch Differenzieren

$$da = \frac{dx(xx - yy)}{2xx} + \frac{ydy}{x},$$

woher

$$p = \frac{xx - yy}{2xx} \quad \text{und} \quad q = \frac{y}{x}$$

wird. Weil also im Allgemeinen diese Gleichung gefunden worden ist:

$$dy(q + \delta p) = dx(\delta q - p),$$

wird für diesen Fall

$$dy[2xy + \delta(xx - yy)] = dx(2\delta xy - xx + yy)$$

oder

$$\delta(xx - yy)dy - 2\delta xydx = (yy - xx)dx - 2xydy$$

sein.

§46 Weil ja aber diese Gleichung homogen ist, setze man sofort $y = tx$, dass $dy = tdx + xdt$ ist, und unsere Gleichung wird diese Form annehmen:

$$xdt = \frac{(1 + tt)(\delta t - 1)dx}{2t + \delta(1 - tt)},$$

woher

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt(2t + \delta(1 - tt))}{(1 + tt)(\delta t - 1)}$$

wird, welcher Bruch in zwei Teile aufgelöst

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2tdt}{1 + tt} + \frac{\delta dt}{\delta t - 1}$$

liefert, dessen Integral offenbar

$$\log x = -\log(1 + tt) + \log(\delta t - 1) + \log c$$

oder

$$x = \frac{c(\delta t - 1)}{1 + tt},$$

nach Wiedereinsetzen des Wertes $t = \frac{y}{x}$

$$x = \frac{cx(\delta y - x)}{xx + yy}$$

sein wird, welche auf diese Form zurückgeführt wird:

$$xx + yy = c(\delta y - x),$$

welche Gleichung, wie schon oben gezeigt worden ist, unendlich viele über derselben schiefen Achse platzierte und durch denselben festen Punkt A hindurchlaufende Kreise umfasst.

Beispiel 3

§47 Wir wollen ein sich um vieles weiter erstreckendes Beispiel entwickeln, wo A einer beliebigen homogenen Funktion A von keiner Dimension von x und y gleich wird. Nachdem also $y = tx$ gesetzt worden ist, wird der Parameter einer Funktion allein der Größe t gleich werden, welche T sei, sodass $a = T$ ist. Wir wollen aber $dT = T'dt$ setzen, sodass $da = T'dt$ ist. Um aber daraus die Werte der Buchstaben p und q bestimmen zu können, wollen wir anstelle von dt den Wert $\frac{xdy - ydx}{xx}$ schreiben, und es wird

$$p = -\frac{T'y}{xx} = -\frac{T't}{x} \quad \text{und} \quad q = \frac{T'}{x}$$

sein. Aber diese Werte liefern in der Gleichung $dy = \left(\frac{\delta q - p}{q + \delta p}\right) dx$ eingesetzt

$$dy = \frac{(\delta + t)}{1 - \delta t} dx = tdx + xdt,$$

woher man berechnet, dass

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1 - \delta t)dt}{\delta(1 + tt)}$$

sein wird.

§48 Hier tritt das vollkommen bemerkenswerte Phänomen auf, dass die Natur der Funktion T aus der Rechnung herausgegangen ist. Wir wollen aber zuerst den Fall betrachten, in dem $\delta = \infty$ ist, und es wird

$$\frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{1 + tt}$$

sein, woher

$$\log x = \log c - \log \sqrt{1 + tt} \quad \text{oder} \quad x = \frac{c}{\sqrt{1 + tt}} = \frac{cx}{\sqrt{xx + yy}}$$

wird, welche Gleichung also $\sqrt{xx + yy} = c$ gibt, genauso wie im ersten Beispiel, was sehr merkwürdig ist. Weil nämlich hier $T = a$ ist und daher konstant, wird für jede beliebige zu schneidende Kurve auch t, das heißt $\frac{y}{x}$, konstant sein, sodass auch in diesem Fall alle zu schneidenden Linien Geraden sind. So werden auch für die schiefen Winkel die Trajektorien logarithmische Spiralen sein.

BEISPIEL 4

§49 Der variable Parameter a werde einer beliebigen homogenen Funktion von x und y gleich, deren Anzahl an Dimensionen n sei, welche also, nach Setzen von $y = tx$, diese Form annehmen wird: $x^n \cdot T$, sodass T eine bestimmte Funktion nur von t ist, deren Differential also diese Form haben wird: $dT = T'dt$. Weil also daher $a = x^n T$ ist, wird

$$da = x^n T' dt + nx^{n-1} T dx$$

sein; weil hier $t = \frac{y}{x}$ ist, wird

$$dt = \frac{dy}{x} - \frac{ydx}{xx}$$

sein; daher, wenn diese Form mit der allgemeinen $da = pdx + qdy$ verglichen wird, wird

$$q = x^{n-1}T' \quad \text{und} \quad p = nx^{n-1}T - x^{n-2}yT' = nx^{n-1}T - x^{n-1}T't$$

sein. Nun stelle man die Gleichung für die Trajektorien in dieser Form ausgedrückt dar:

$$pdx + qdy = \delta(qdx - pdy)$$

und wir werden

$$pdx + qdy = da = x^nT'dt + nx^{n-1}Tdx$$

haben, aber

$$\begin{aligned} qdx \, - \, pdy &= x^{n-1}T'dx - nx^{n-1}Tdy + x^{n-1}T'tdy \\ &= x^{n-1}T'dx - nx^{n-1}Ttdx + x^{n-1}T'ttdx \\ &- nx^nTdt + x^nT'tdt \end{aligned}$$

oder

$$qdx - pdy = x^{n-1}dx(T'(1+tt) - nTt) - x^ndt(nT - T't),$$

nach Einsetzen welcher Werte die Gleichung für die Trajektorie, durch x^{n-1} geteilt,

$$xT'dt + nTdx = \delta dx(T'(1+tt) - nTt) - \delta xdt(nT - T't)$$

sein wird. Wenn also diese Formel allein mit Logarithmen integriert werden kann, wird man eine algebraische Gleichung für die Trajektorien erhalten. Allgemein bereitet aber in diesem Fall die Konstruktion der Trajektorien keine Schwierigkeiten.

§50 Also wird man für die rechtwinkligen Trajektorien, wo $\delta = \infty$ ist, diese Gleichung haben:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(nT - T't)dt}{T'(1 + tt) - nTt},$$

welche, weil $T'dt = dT$ ist,

$$\frac{dx}{x} = \frac{nTdt - tdT}{T'(1 + tt) - nTt}$$

sein wird. Aber wenn der Schnittwinkel verschwinden muss, dass $\delta = 0$ ist, wird

$$\frac{dx}{x} = -\frac{T'dt}{nT} = -\frac{dT}{nT}$$

werden, deren Integral $\log x = -\frac{1}{n} \log T$ oder $x^n T = a$ ist, welche die Gleichung für eine beliebige zu schneidende Kurve ist, sodass daher scheint, dass keine anderen Kurven gegeben sind, welche alle zu scheidenden berührt, obwohl dennoch im vorhergehenden Fall auch andere Kurven von dieser Art gefunden worden sind, die natürlich in der Gleichung $q = 0$ (siehe § 12) enthalten sind. Aber, weil wir ja hier die mit δ behafteten Terme zerstört haben, ist sorgfältig zu erwägen, dass sich das nur machen lässt, wenn die mit δ multiplizierten Größen nicht unendlich werden; deswegen, wenn es passiert, dass diese Größen ins Unendliche wachsen können, dann können aus ihnen die Kurven, die alle vorgelegten berühren, abgeleitet werden.

§51 Hier verdient aber besonders bemerkt zu werden, dass dieser Fall, in dem der Parameter a durch eine Funktion der zwei Koordinaten x und y ausgedrückt wird, uns eine leichte Methode schenkt, unzählige Fälle anzugeben, in welchen so die zu schneidenden Kurven wie die Trajektorien algebraische Linien werden, welche Untersuchung sich im vorhergehenden Fall nicht einmal hatte versuchen lassen. Wir wollen also diese Frage von höchster Bedeutung im folgenden Problem abhandeln.

PROBLEM

Unzählige Fälle ausfindig zu machen, in denen so die zu schneidenden Kurven wie alle Trajektorien algebraische Linien werden.

§52 Weil wir für die zu schneidenden Kurven $da = pdx + qdy$ gesetzt haben, ist es zuerst notwendig, dass die Formel $pdx + qdy$ ein algebraisches Integral zulässt, welches man $= P$ setze, sodass $a = P$ und $dP = pdx + qdy$ ist. Aber darauf, weil für die Trajektorien in irgendeinem Schnittwinkel α, dessen Tangens wir hier $= \delta$ gesetzt haben, wir diese Gleichung [§ 41] erhalten haben:

$$pdx + qdy = \delta(qdx - pdy),$$

wird verlangt, dass auch diese Gleichung integrierbar gemacht wird; weil aber ihre linke Seite $pdx + qdy$ schon per se integrierbar ist, wird nur das verlangt, dass auch das Integral der anderen Seite $qdx - pdy$ algebraisch gemacht wird. Wenn wir also dieses Integral mit dem Buchstaben Q bezeichnen, dass $dQ = qdx - pdy$ ist, wird für die Trajektorien $dP = \delta dQ$ sein, woher die integrierte Gleichung für die Trajektorien zu $P = \delta Q + C$ berechnet, wo die Konstante den variablen Parameter für alle Trajektorien geben wird, von welchen also die Gleichung auf diese Weise daragestellt werden können wird: $b = P - \delta Q$, während für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung gilt: $a = P$.

§53 Also ist die ganze Aufgabe darauf zurückgeführt worden, dass den folgenden beiden Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$\text{I.} \quad dP = pdx + qdy,$$
$$\text{II.} \quad dQ = qdx - pdy.$$

Natürlich müssen für diese Buchstaben P und Q algebraische Größen oder Funktionen der beiden Größen x und y solcher Art gefunden werden, dass diese zwei Bedingungen erfüllt werden. Für dieses Ziel wollen wir die erste mit f multiplizieren, die zweite hingegen mit g, welche Buchstaben irgendwelche konstanten Größen bezeichnen, und es ist offensichtlich, dass auch diese Gleichung:

$$fdP + gdQ = p(fdx - gdy) + q(fdy + gdx)$$

integrierbar gemacht werden muss, und weil ja f und g von unserem Belieben abhängen, wollen wir sie so bestimmen, dass die beiden Differentialformeln

$fdx - gdy$ und $fdy + gdx$ zueinander ein konstantes Verhältnis haben. Wir wollen also

$$rdx - gdy : gdx + fdy = f : g$$

setzen, woher diese Bestimmung $ff = -gg$ entsteht. Wenn wir $f = 1$ setzen, wird $g = \pm\sqrt{-1}$ sein, welche Bestimmung, auch wenn sie imaginär ist, uns eine außergewöhnliche Lösung an die Hand geben wird.

§54 Weil wir also zwei Bestimmungen gefunden haben, sei zuerst $f = 1$ und $g = +\sqrt{-1}$ und die letzte Gleichheit wird diese Form annehmen:

$$dP + dQ\sqrt{-1} = p(dx - dy\sqrt{-1}) + q(dy + dx\sqrt{-1}),$$

welche auf diese Form zurückgeführt wird:

$$dP + dQ\sqrt{-1} = p(dx - dy\sqrt{-1}) - \frac{q}{\sqrt{-1}}(dx - dy\sqrt{-1}),$$

das heißt

$$dP + dQ\sqrt{-1} = \left(p - \frac{q}{\sqrt{-1}}\right)(dx - dy\sqrt{-1});$$

weil diese Formel integrierbar sein muss, ist es notwendig, dass $p - \frac{q}{\sqrt{-1}}$ eine Funktion von $x - y\sqrt{-1}$ ist; dann wird aber auch das Integral eine Funktion der Formel $x - y\sqrt{-1}$ sein wird, welche wir auf die nun übliche Weise so darstellen wollen $\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$, und so werden wir diese Gleichheit haben

$$P + Q\sqrt{-1} = \Gamma : (x - y\sqrt{-1}).$$

§55 In gleicher Weise, wenn wir $f = 1$ und $g = -\sqrt{-1}$ setzen, haben wir

$$\begin{aligned} dP - dQ\sqrt{-1} &= p(dx + dy\sqrt{-1}) + q(dy - dx\sqrt{-1}) \\ &= p(dx + dy\sqrt{-1}) + \frac{q}{\sqrt{-1}}(dx + dy\sqrt{-1} \end{aligned}$$

und daher

$$dP - dQ\sqrt{-1} = \left(p + \frac{q}{\sqrt{-1}}\right)(dx + dy\sqrt{-1});$$

weil diese Gleichung integrierbar sein muss, ist es notwendig, dass $p + \frac{q}{\sqrt{-1}}$ eine Funktion der Formel $x + y\sqrt{-1}$ ist; aber dann wird auch das Integral eine Funktion derselben Formel sein; wenn selbige auf diese Weise notiert wird: $\Delta : (x + y\sqrt{-1})$, werden wir durch Integrieren

$$P - Q\sqrt{-1} = \Delta : (x + y\sqrt{-1})$$

erhalten. Aber aus diesen zwei Gleichungen, wenn sie addiert werden, erschließt man, dass

$$2P = \Gamma : (x - y\sqrt{-1}) + \Delta : (x + y\sqrt{-1})$$

sein wird, aber die zweite von der ersten subtrahiert wird

$$2Q\sqrt{-1} = \Gamma : (x - y\sqrt{-1}) - \Delta : (x + y\sqrt{-1})$$

geben.

§56 Aus diesen Überlegungen, freilich mit imaginären Formeln, haben wir so für P wie für Q geeignete Funktionen von x und y erlangt, die unserem Problem Genüge leisten, weil ja

$$P = \frac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Delta : (x + y\sqrt{-1}),$$
$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta : (x + y\sqrt{-1})$$

sein wird, oder wenn wir $\sqrt{-1}$ negativ annehmen, werden wir

$$P = \frac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Delta : (x - y\sqrt{-1}),$$
$$Q = -\frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta : (x - y\sqrt{-1})$$

haben. Nachdem aber diese Werte gefunden worden sind, wird man für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung haben: $a = P$; für die Trajektorien aber diese: $b = P - \delta Q$.

§57 Also haben wir eine sehr allgemeine Lösung für unser Problem erlangt, dann haben wir für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung erhalten:

$$a = \frac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Delta : (x - y\sqrt{-1}),$$

für die Tajektoren hingegen, in irgendeinem Winkel α, dessen Tangens δ ist, diese:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Delta : (x - y\sqrt{-1}) \\ &+ \frac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Delta : (x - y\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

wo a den variablen Parameter der zu scheidenden Kurven und b den variablen Parameter der Trajektorien bezeichnet; es ist aber offensichtlich, dass jede der beiden Gleichungen algebraisch sein wird, wenn nur die Buchstaben Γ und Δ algebraische Funktionen bezeichnen.

§58 Um aber diese Gleichungen von den imaginären Größen zu befreien, ist es ersichtlich, dass das erreicht wird, wenn Δ dieselbe Funktion ihrer Größe $x - y\sqrt{-1}$ bezeichnet, wie Γ eine Funktion ihrer Größe $x + y\sqrt{-1}$ ist; denn dann, wenn diese beiden Funktionen addiert werden, werden alle imaginären Terme sich gegenseitig aufhaben, die reellen aber verdoppelt, woher für P eine reelle Funktion hervorgehen wird; wenn aber die eine Formel von der anderen abgezogen wird, werde sich die reellen Terme aufheben und allein die imaginären verdoppelt, welche also durch $2\sqrt{-1}$ geteilt reell werden, sodass in diesem Fall auch für Q ein reeller Wert hervorgeht. Deswegen wollen wir anstelle von Δ Γ schreiben, und unsere beiden Gleichungen werden sein:

Für die zu scheidenden Kurven

$$a = \frac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$$

Für die Trajektorien

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}) \\ &+ \frac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{\delta}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

§59 Damit wir nun diese Formeln für uns besser gebräuchlich machen, wollen wir der Kürze wegen

$$P = \frac{1}{2}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) + \frac{1}{2}\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$$

und

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x + y\sqrt{-1}) - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma : (x - y\sqrt{-1})$$

setzen, dass man für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung hat $a = P$ und für die Trajektorien $b = P + \delta Q$; daher ist sofort klar, dass sich diese Lösung um vieles weiter erstreckt als es auf den ersten Blick schien. Wenn wir nämlich der Funktion Γ nacheinander die einen und die anderen Bedeutungen zuweisen, aus welchen die zwei Werte P' und Q' entspringen, dann P'' und Q'', weiter gleichermaßen P''' und Q''' etc., dann, wenn für die zu schneidenden Kurven diese Gleichung

$$a = P + P' + P'' + P''' + \text{etc.}$$

angenommen wird, wird für die Trajektorien diese gelten:

$$b = P + \delta Q + P' + \delta Q' + P'' + \delta Q'' + P''' + \delta Q''' + \text{etc.}$$

Ja diese einzelnen Werte werden sich sogar mit konstanten Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. multiplizieren lassen, sodass man für die zu schneidenden

$$a = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}P' + \mathfrak{C}P'' + \mathfrak{D}P''' + \text{etc.},$$

für die Trajektorien hingegen

$$\begin{aligned} b = {} & \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}P' + \mathfrak{C}P'' + \text{etc.} \\ & + \delta\mathfrak{A}Q + \delta\mathfrak{B}Q' + \delta\mathfrak{C}Q'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

hat, woher klar ist, dass die Anzahl an Lösungen leicht bis ins Unendliche vermehrt werden kann.

§60 Weil also jede beliebige Funktion Γ gewisse Werte für P und Q an die Hand gibt, wollen wir einfachere Fälle entwickeln, in welcher der Buchstabe Γ einfache Potenzen bezeichnet, welche wir auf die folgende Weise darbieten wollen:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{I.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^1, & \text{wird} & P = x \quad \text{und} \quad Q = y. \\
\text{II.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^2, & \text{wird} & P = xx - yy \quad \text{und} \quad Q = 2xy \\
\text{III.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^3, & \text{wird} & P = x^3 - 3xyy \quad \text{und} \quad Q = 3xxy - y^3. \\
\text{IV.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^4, & \text{wird} & P = x^4 - 6xxyy + y^4 \\
 & & \text{und} & Q = 4x^3y - 4xy^3. \\
\text{V.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^5, & \text{wird} & P = x^5 - 10x^3yy + 5xy^4 \\
 & & \text{und} & Q = 5x^4y - 10xxy^3 + y^5. \\
\text{VI.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^6, & \text{wird} & P = x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6 \\
 & & \text{und} & Q = 6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5. \\
\text{VII.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^7, & \text{wird} & P = x^7 - 21x^5yy + 35x^3y^4 - 7xy^6 \\
 & & \text{und} & Q = 7x^6y - 35x^4y^3 + 21xxy^5 - y^7. \\
\text{VIII.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^8, & \text{wird} & P = x^8 - 28x^6yy + 70x^4y^4 - 28xxy^6 + y^8 \\
 & & \text{und} & Q = 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7. \\
\text{IX.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^9, & \text{wird} & P = x^9 - 36x^7yy + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8 \\
 & & \text{und} & Q = 9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36xxy^7 + y^9. \\
\text{X.} & \text{Mit} \quad \Gamma = ()^{10}, & \text{wird} & P = x^{10} - 45x^8yy + 210x^6y^4 - 210x^4y^6 \\
 & & & \quad + 45xxy^8 - y^{10} \\
 & & \text{und} & Q = 10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 \\
 & & & \quad - 120x^3y^7 + 10xy^9.
\end{array}
$$

§61 Weil ja diese Werte für P und Q nach Dimensionen der Koordinaten x und y ansteigen, werden sich aus jeder Ordnung der Linien so zu schneidende Linien wie Trajektorien darbieten lassen, und freilich umso mehr, je höher die Ordnung war, weil ja für jede Ordnung die unteren Werte verwickelt werden können. Deswegen wollen wir die Gleichungen so für die zu schneidenden Kurven wie für die Trajektorien für die einzelnen Ordnungen hier darbieten.

Für die erste Ordnung

$$a = \mathfrak{A}x \quad \text{und} \quad b = \mathfrak{A}x + \delta\mathfrak{A}y.$$

Für die zweite Ordnung

$$a = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) \quad \text{und}$$

$$b = \mathfrak{A}x + \delta\mathfrak{A}y + \mathfrak{B}(xx - yy) + 2\delta\mathfrak{B}xy.$$

Für die dritte Ordnung

$$a = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3xyy) \quad \text{und}$$

$$b = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}(xx - yy) + \mathfrak{C}(x^3 - 3xyy)$$

$$= \delta\mathfrak{A}y + 2\delta\mathfrak{B}xy + \delta\mathfrak{C}(3xxy - y^3).$$

Für die vierte Ordnung

$$a = \text{die vorhergehende} + \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4).$$

$$b = \text{die vorhergehende} + \mathfrak{D}(x^4 - 6xxyy + y^4)$$

$$+ \text{die vorhergehende} + \delta\mathfrak{D}(4x^3y - 4xy^3)$$

Für die fünfte Ordnung

$$a = \text{die vorhergehende} + \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4).$$

$$b = \text{die vorhergehende} + \mathfrak{E}(x^5 - 10x^3yy + 5xy^4).$$

$$+ \text{die vorhergehende} + \delta\mathfrak{E}(5x^4y - 10xxy^3 + y^5).$$

Für die sechste Ordnung

$$a = \text{die vorhergehende} + \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6).$$

$$b = \text{die vorhergehende} + \mathfrak{F}(x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6)$$

$$+ \text{die vorhergehende} + \delta\mathfrak{F}(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5).$$

§62 Ja es lassen sich für die Funktion Γ sogar negative Potenten annehmen; um dies auszuführen, sei im Allgemeinen

$$P = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{-n} + \frac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{-n},$$

welche man auf positive Exponenten zurückführe, und es wird

$$P = \frac{\frac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^n}{(xx + yy)^n}$$

sein. In gleicher Weise, wenn man

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x + y\sqrt{-1})^{-n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - y\sqrt{-1})^{-n}$$

setzt, wird nach der Reduktion auf positive Exponenten

$$\frac{(x - y\sqrt{-1})^n - (x + y\sqrt{-1})^n}{2(xx + yy)^n\sqrt{-1}}$$

werden. Daher werden wir also, wenn wir dem Exponenten n nacheinander die Werte 1, 2, 3, 4 etc. zuteilen, die folgenden Werte erhalten:

I. Mit $n = 1$ wird $P = \dfrac{x}{xx + yy}$ und $Q = -\dfrac{y}{xx + yy}$,

II. Mit $n = 2$ wird $P = \dfrac{xx - yy}{(xx + yy)^2}$ und $Q = -\dfrac{2xy}{(xx + yy)^2}$,

III. Mit $n = 3$ wird $P = \dfrac{x^3 - 3xyy}{(xx + yy)^3}$ und $Q = -\dfrac{3xxy - y^3}{(xx + yy)^3}$,

IV. Mit $n = 4$ wird $P = \dfrac{x^4 - 6xxyy + y^4}{(xx + yy)^4}$ und $Q = -\dfrac{4x^3y - 4xy^3}{(xx + yy)^4}$,

V. Mit $n = 5$ wird $P = \dfrac{x^5 - 10x^3yy + 5xy^4}{(xx + yy)^5}$ und

$$Q = \frac{-5x^4y + 10xxy^3 - y^5}{(xx + yy)^5},$$

VI. Mit $n = 6$ wird $P = \dfrac{x^6 - 15x^4yy + 15xxy^4 - y^6}{(xx + yy)^6}$ und

$$Q = \frac{-6x^5y + 20x^3y^3 - 6xy^5}{(xx + yy)^6}.$$

Daher wird also die oben dargebotene Menge der Genüge leistenden Kurven um vieles mehr vermehrt werden können.

§63 Außerdem werden sich aber auch gebrochene Exponenten verwenden lassen, wenn nur die Brüche in der Form $\frac{n}{2}$ enthalten sind, weil ja, wenn andere Teile zugelassen werden würden, dann die Größen P und Q nicht weiter entwickelt werden könnten, sondern erst durch die Auflösung der Gleichung gefunden müssten. Es sei also

$$P = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n}$$

und nach Nehmen der Quadrate wird

$$PP = \frac{1}{4}(x + y\sqrt{-1})^{n} + \frac{1}{4}(x - y\sqrt{-1})^{n} + \frac{1}{2}(xx + yy)^{\frac{1}{2}n}$$

oder

$$2PP = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{-1})^{n} + \frac{1}{2}(x - y\sqrt{-1})^{n} + (xx + yy)^{\frac{1}{2}n}$$

sein; weil hier die zwei imaginären Teile schon oben reell erklärt worden sind, wird daher der reelle Wert für P gefunden. In gleicher Weise, wenn

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x + y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}(x - y\sqrt{-1})^{\frac{1}{2}n}$$

gesetzt wird, wird nach Nehmen der Quadrate

$$-4QQ = (x + y\sqrt{-1})^{n} + (x - y\sqrt{-1})^{n} - 2(xx + yy)^{\frac{1}{2}n}$$

sein, wo sich wiederum die imaginären Anteile gegenseitig aufheben.

§64 Um diese zu zeigen, sei $n = 1$ und es wird

$$2PP = x + \sqrt{xx + yy} \quad \text{und daher} \quad P = \sqrt{\frac{x + \sqrt{xx + yy}}{2}}$$

sein; weiter ist $-4QQ = 2x - 2\sqrt{xx + yy}$, woher

$$Q = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{xx + yy}}{2}}$$

wird. In gleicher Weise, wenn $n = 3$ ist, wird

$$2PP = x^3 - 3xyy + (xx + yy)^{\frac{3}{2}}$$

und daher

$$P = \sqrt{\frac{x^3 - 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{2}}$$

sein; weiter wird man für Q diese Gleichung haben:

$$-2QQ = x^3 - 3xyy - (xx+yy)^{\frac{3}{2}}$$

und daher

$$Q = \sqrt{\frac{-x^3 + 3xyy + (xx+yy)^{\frac{3}{2}}}{2}}.$$

Und in gleicher Weise kann die Menge der geeigneten Werte für P und Q weiter vermehrt werden. Ja, wenn wir $n = -1$ nehmen wollen, wird auch

$$2PP = \frac{1}{2(x+y\sqrt{-1})} + \frac{1}{2(x-y\sqrt{-1})} + \frac{1}{\sqrt{xx+yy}}$$

oder

$$2PP = \frac{x}{xx+yy} + \frac{1}{\sqrt{xx+yy}} = \frac{x+\sqrt{xx+yy}}{xx+yy}$$

sein, woher

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{xx+yy}}{2(xx+yy)}}$$

wird; weiter wird aber

$$-4QQ = \frac{1}{x+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-y\sqrt{-1}} - \frac{2}{\sqrt{xx+yy}} = \frac{2x}{xx+yy} - \frac{2}{\sqrt{xx+yy}}$$

sein, woher

$$Q = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{xx+yy}}{2(xx+yy)}}$$

wird.

§65 Aber all diese Formeln werden sich um vieles gefälliger mit der Vervielfachung von Winkeln darbieten lassen. Wenn wir nämlich $\sqrt{xx+yy} = z$ setzen und φ den Winkel bezeichnet, dessen Tangens $= \frac{y}{x}$ ist, wird $x = z\cos\varphi$ und $y = z\sin\varphi$ sein; nach Einsetzen dieser Werte, wenn die Funktion Γ eine Potenz des Exponenten n bezeichnet, wird

$$P = \frac{1}{2}z^n(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n + \frac{1}{2}z^n(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)^n$$

sein, welche Form mit den bekannten Reduktion $P = z^n \cos n\varphi$ liefert. Und in gleicher Weise geht aus der Form

$$Q = \frac{z^n}{2\sqrt{-1}}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n - \frac{z^n}{2\sqrt{-1}}(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)^n$$

$Q = z^n \sin n\varphi$ hervor, welche Werte, wenn anstelle von z und φ die gerade angegebenen Werte eingesetzt werden, sofort die schon oben entwickelten Formeln liefern. Nun werden sich aber zusätzlich für die Zahl n nach Belieben irgendwelche Brüche annehmen lassen, wenn freilich die Multiplikation und Teilung von Winkeln als bekannt angenommen wird.

§66 Obwohl aber die Menge dieser Lösungen groß ist, kann sie dennoch darüber hinaus auf das Doppelte vermehrt werden. Denn wenn die zwei konjugierten Werte für die Buchstaben P und Q $P = M$ und $Q = N$ waren, dann wird immer $P = -N$ und $Q = +M$ genommen werden können, das heißt, diese Werte lassen sich vertauschen, solange das Vorzeichen des einen der beiden umgedreht wird, was so gezeigt werden kann. Weil

$$M = P, \quad N = Q, \quad dM = pdx + qdy \quad \text{und} \quad dN = qdx - pdy$$

ist, schreibe man nun q' anstelle von p und p' anstelle von $-q$, es wird

$$dM = q'dx - p'dy \quad \text{und} \quad dN = -p'dx - q'dy$$

werden; daher ist klar, dass der Buchstaben M einen geeigneten Wert für Q liefert, der Buchstabe N hingegen für $-P$.

§67 Daher, wenn für P und Q irgendwelche konjugierten Werte genommen werden, die in den oberen Tabellen angegeben worden sind, wird für die zu schneidenden Kurven eine solche Gleichung festgelegt werden können:

$$a = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{A}'P' + \mathfrak{B}'Q' + \text{etc.}$$

und dann wird man für die Trajektorien diese Gleichung haben:

$$b = \mathfrak{A}(P + \delta Q) + \mathfrak{B}(Q - \delta P) + \mathfrak{A}'(P' + \delta Q') + \mathfrak{B}'(Q' - \delta P') + \text{etc.}$$

§68 Weil ja die zu schneidenden Kurven und die Trajektorien miteinander vertauscht werden können, dies dennoch aus den gefundenen Formeln nicht klar ist, wird es der Mühe wert sein, diese Formeln so zu transformieren, dass die Vertauschbarkeit sofort ins Auge springt. Für dieses Ziel wollen wir diese Formeln betrachten:

$$a = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q \quad \text{und} \quad b = \mathfrak{A}(P + \delta Q) + \mathfrak{B}(Q - \delta P)$$

oder

$$b = P(\mathfrak{A} - \delta\mathfrak{B}) + Q(\delta\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$$

betrachten und wir wollen

$$\mathfrak{A} = f \cos\lambda \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = f \sin\lambda$$

setzen, und es wird wegen $\delta = \tan\alpha$

$$\mathfrak{A} - \delta\mathfrak{B} = f\cos\lambda - f\tan\alpha\sin\lambda = \frac{f}{\cos\alpha}\cos(\alpha + \lambda)$$

und

$$\delta\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = f\tan\alpha\cos\lambda + f\sin\lambda = \frac{f}{\cos\alpha}\sin(\alpha + \lambda)$$

sein, woher, weil anstelle von b $\frac{b}{\cos\alpha}$ geschrieben werden kann, unsere Gleichungen

$$a = fP\cos\lambda + fQ\sin\lambda$$

und

$$b = fP\cos(\alpha + \lambda) + fQ\sin(\alpha + \lambda)$$

sein werden, in welchen schon eine außerordentlich Harmonie erkannt wird, welche noch offensichtlicher werden wird, wenn wir anstelle von λ $\vartheta - \frac{1}{2}\alpha$ schreiben; denn dann werden wir für die zwei Reihen unserer Kurven diese Gleichungen haben:

$$a = fP\cos\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right) + fQ\sin\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

und

$$b = fP\cos\left(\vartheta + \frac{1}{2}\alpha\right) + fQ\sin\left(\vartheta + \frac{1}{2}\alpha\right),$$

von welchen die eine in die andere umgewandelt wird, wenn anstelle von α $-\alpha$ geschrieben wird. Aber oben haben wir schon bemerkt, dass der Schnitt derselbe bleibt, unabhängig davon, ob der Winkel α positiv oder negativ genommen wird, was auch die Natur der Sache erfordert; denn wenn in Bezug auf die zu schneidenden Kurven der Schnittwinkel α im Uhrzeigersinn genommen wird, dann wird er in Bezug auf die Trajektorien gegen Uhrzeigersinn genommen werden.

§69 Nachdem diese Dinge bemerkt worden sind, wollen wir sehen, auf wie viele Weisen die Linien zweiter Ordnung oder Kegelschnitte an die Lösung unseres Problem angepasst werden können. Für diese Ziel wollen wir aus der Tabelle von Paragraph 60 zuerst $P = x$ und $Q = y$ nehmen, dann aber auch $P = xx - yy$ und $Q = 2xy$, aus welchen nach Verbinden von ihnen wir für die zwei Arten von Linien zuerst

$$a = fx\cos\left(\zeta - \frac{1}{2}\alpha\right) + fy\sin\left(\zeta - \frac{1}{2}\alpha\right) + g(xx - yy)\cos\left(\eta - \frac{1}{2}\alpha\right) \\ +2gxy\sin\left(\eta - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

und

$$a = fx\cos\left(\zeta + \frac{1}{2}\alpha\right) + fy\sin\left(\zeta + \frac{1}{2}\alpha\right) + g(xx - yy)\cos\left(\eta + \frac{1}{2}\alpha\right) \\ +2gxy\sin\left(\eta + \frac{1}{2}\alpha\right)$$

haben, wo so die Größen f und g wie die Winkel ζ und η nach unserem Belieben angenommen werden können. Es ist aber ersichtlich, dass all diese Kurven immer über derselben Achse und von demselben Mittelpunkt aus beschriebene äquilaterale Hyperbeln sind.

§70 Oben haben wir gesehen, wenn die zu scheidenden Kurven unendlich viele einander in demselben Punkt berührende Kreise waren, dass dann auch die Trajektorien Kreise von solcher Art sind, welcher Fall also in den gerade gefundenen Formeln nicht enthalten ist. Dieser Fall wird aber aus den Formeln von Paragraph 62 abgeleitet werden, wo

$$P = \frac{x}{xx+yy} \quad \text{und} \quad Q = -\frac{y}{xx+yy}$$

war, aus welchen für die zwei Reihen von Linien diese Gleichungen entstehen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{fx}{xx+yy}\cos\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{fy}{xx+yy}\sin\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right), \\ b &= \frac{fx}{xx+yy}\cos\left(\vartheta + \frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{fy}{xx+yy}\sin\left(\vartheta + \frac{1}{2}\alpha\right); \end{aligned}$$

aber wenn wir anstelle von a und b $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ schreiben und mit $xx+yy$ multiplizieren, werden diese Gleichungen sein:

$$xx + yy = afx\cos\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right) - afy\sin\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right)$$

und

$$xx + yy = bfx\cos\left(\vartheta + \frac{1}{2}\alpha\right) - afy\sin\left(\vartheta\frac{1}{2}\alpha\right).$$

von welchen beide die für einen Kreis sind.

§71 Aber aus den oben in Paragraph 64 gegebenen Formeln:

$$P = \sqrt{\frac{x+\sqrt{xx+yy}}{2}} \quad \text{und} \quad Q = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{xx+yy}}{2}}$$

lassen sich auch Linien zweiter Ordnung finden; denn daher wird für die erste Reihe

$$a = f\cos\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right)\sqrt{\frac{x+\sqrt{xx+yy}}{2}} + f\sin\left(\vartheta - \frac{1}{2}\alpha\right)\sqrt{\frac{-x+\sqrt{xx+yy}}{2}}$$

sein, woher nach Nehmen von Quadraten

$$2aa = ffx\cos(2\vartheta-\alpha) + ff\sqrt{xx+yy} + ffy\sin(2\vartheta-\alpha)$$

sein wird, welche weiter vereinfacht

$$\begin{aligned} 4a^4 &- 4aaffx\cos(2\vartheta-\alpha) - 4aaffy\sin(2\vartheta-\alpha) \\ &+ f^4xx\cos^2(2\vartheta-\alpha) + 2f^4xy\sin(2\vartheta-\alpha)\cos(2\vartheta-\alpha) \\ &+ f^4yy\sin^2(2\vartheta-\alpha) = f^4xx + f^4yy \end{aligned}$$

liefert, welcher Ausdruck weiter in diese Form gebracht wird:

$$\begin{aligned} &4a^4 - 4aaffx\cos(2\vartheta-\alpha) - 4aaffy\sin(2\vartheta-\alpha) \\ &= f^4xx\sin^2(2\vartheta-\alpha) + f^4yy\cos^2(2\vartheta-\alpha) - 2f^4xy\sin(2\vartheta-\alpha)\cos(2\vartheta-\alpha) \\ &= f^4(x\sin(2\vartheta-\alpha) - y\cos(2\vartheta-\alpha))^2, \end{aligned}$$

wo, wenn wir anstelle von a $\frac{f\sqrt{a}}{\sqrt{2}}$ schreiben, jene Gleichung

$$aa - 2ax\cos(2\vartheta-\alpha) - 2ay\sin(2\vartheta-\alpha) = (x\sin(2\vartheta-\alpha) - y\cos(2\vartheta-\alpha))^2$$

sein wird. Für die andere Reihe schreibe man aber anstelle von a b und nehme α negativ und es wird

$$bb - 2bx\cos(2\vartheta+\alpha) - 2by\sin(2\vartheta+\alpha) = (x\sin(2\vartheta+\alpha) - y\cos(2\vartheta+\alpha))^2$$

sein; dort, weil das höchste Glied ein Quadrat ist, werden beide Linien Parabeln sein, und zwar all über derselben Achse und um denselben Brennpunkt herum beschrieben; daher lässt sich schließen, dass keine unserem Problem Genüge leistenden Ellipsen gegeben sind.

§72 Wir haben also eine übervolle Quelle entdeckt, nicht nur das Problem der Trajektorien im Allgemeinen zu lösen, sondern auch unzählige algebraische Kurven darzubieten, und diese Quelle hat uns der zweite Fall eröffnet, in welchem sich der variable Parameter a durch die zwei Koordinaten x und y auszudrücken ließ, während der erste Fall, in welchem die Ordinate y durch a und x ausgedrückt war, für dieses Ziel als wenig nützlich entdeckt worden ist; daher wird schon hinreichend eingesehen, dass aus dem letzten Fall, in welchem von den drei Variablen a, x und y sich keine durch die beiden anderen ausdrücken lässt, nichts zu unserem Zweck abgeleitet werden kann, weshalb wir seine Entwicklung völlig übergangen haben. Im Übrigen, obwohl dieses Problem schon vor mehr als fünfzig Jahren mit größtem Eifer von den Geometern behandelt worden war, glaube ich für meine Person dennoch einiges beigetragen zu haben, weil ja hier viele neue Dinge auftauchen, und eine große Menge von all diesen, die zur damaligen Zeit ziemlich nebulös erscheinen konnten, hier klar erläutert aufgefunden werden. Und es besteht freilich kein Zweifel, dass aus demselben Gegenstand noch sehr viele wunderbare Entdeckungen gemacht werden können.